

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

33. Band, Heft 4/5

26. April 1950

S. 145–240

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Invariantentheorie:

Tenca, Luigi: Sulle radici n -esime primitive dell'unità. Periodico Mat., IV. S. 27, 104–108 (1949).

Im Anschluß an eine frühere Note [dies. Zbl. 30, 6] knüpft Verf. an die bekannte Tatsache an, daß das Verschwinden der Zirkulante $D = |a_1 a_2 \dots a_n|$, deren Zeilen aus der angegebenen ersten durch fortgesetzte Anwendung der zyklischen Permutation $Z = (a_v \rightarrow a_{v-1})$ hervorgehen, die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz mindestens einer gemeinsamen Wurzel der beiden Gleichungen (1) $x^n - 1 = 0$ und (2) $a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1} = 0$ ist, D heiße die zur Gleichung (2) „gehörige“ Zirkulante. Die a_v ($v = 1, 2, \dots, n$) werden als reell und verschieden vorausgesetzt. Durch fortgesetzte Anwendung von Z auf (2) entsteht ein System S von n Gleichungen, welche alle dieselben Wurzeln mit (1) gemein haben. Unterwirft man S den Permutationen $Q(q_r) = (a_v \rightarrow a_{1+(v-1)q_r})$, wo $q_r < n$ und relativ prim zu n ist, so entstehen $\varphi(n) - 1$ weitere Systeme $S(q_r)$ von je n Gleichungen, welche Verf. mit S zu einem „Aggregat“ A zusammenfaßt. Die Gesamtheit der $n!$ Gleichungen, welche aus (2) durch beliebige Permutationen der Koeffizienten hervorgehen, zerfällt in lauter solche Aggregate. Die absoluten Beträge der Zirkulanten, die zu zwei dieser $n!$ Gleichungen gehören, stimmen überein, wenn die Gleichungen demselben Aggregat angehören, und sind andernfalls „im allgemeinen“ verschieden. Das Letztere wird im folgenden vorausgesetzt. Ferner sei $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$ und bei geradem n auch $a_1 - a_2 + \dots - a_n \neq 0$. Dies bedingt, daß man $n > 4$ (nicht nur, wie Verf., $n > 3$) annehmen muß. Ist dann ε eine Wurzel von (1), welche auch Wurzel der n Gleichungen eines Systems $S(q_r)$ des Aggregats A ist, so gilt dasselbe für ε^{-1} , und beide sind primitive Wurzeln von (1), zugleich aber auch Wurzeln des zu $S(q_r)$ „konjugierten“ Systems $S(-q_r)$ von A . Wenn $D = 0$ ist, ist jede primitive Wurzel von (1) auch Wurzel mindestens eines Systems von A (und des konjugierten). Als notwendig dafür, daß (bei $D = 0$) jedes Paar konjugierter Systeme von A genau ein Paar konjugierter primitiver Wurzeln von (1) besitzt, gibt Verf. Bedingungen an, die sich nach Ansicht des Ref. beträchtlich vereinfachen lassen. Zum Schluß wird der Multiplikationssatz für Zirkulanten dazu benützt, um in dem zuletzt genannten Fall eine Gleichung herzustellen, welche vier, sechs und schließlich alle primitiven Wurzeln von (1) besitzt. — Die vom Verf. in einer anderen Note (dies. Zbl. 30, 291) veröffentlichte Formel für die spezielle zyklische Determinante, deren Zeilen aus $1, p, \dots, p^{n-1}$ durch fortgesetzte Anwendung von Z^{-1} hervorgehen, findet sich übrigens schon bei G. F. Baehr [Nouv. Ann. Math. 19, 170–174 (1860)].

Schönhardt (Stuttgart).

Speekt, W.: Abschätzungen der Wurzeln algebraischer Gleichungen. Math. Z. 52, 310–321 (1949).

Die Resultate zweier früherer Arbeiten vom Verf. (vgl. dies. Zbl. 22, 301) werden hier verschärft. So gelten die Sätze: Die ihrer absoluten Größe $|\xi_1| \geq |\xi_2| \geq \dots \geq |\xi_n|$ nach geordneten Nullstellen des Polynoms $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ genügen den genauen Ungleichungen

$$|\xi_1 \xi_2 \dots \xi_k| \leq A = (1 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad |\xi_k| \leq \sqrt[k]{A} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Für jede positive Zahl m ist $\sum_{k=1}^n |\xi_k|^m \leq A^m + n - 1$. — Hat das Polynom $f(z)$ reelle Koeffizienten, so liegen seine nichtreellen Nullstellen im Kreise $|z| \leq \sqrt[k]{A}$ und auch im Kreise $|z| \leq \frac{1}{2} \alpha \sqrt[k]{108}$, wenn $\alpha = \max \sqrt[k]{|a_k|}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ist. — Sind $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_n$ die der Größe nach geordneten absoluten Beträge der Koeffizienten a_k von $f(z)$, $\varrho_k = 1 + \sum_{i=1}^k \beta_i$, $\sigma_k = \max(1, \varrho_{n-k+1} - 1)$ und $\delta_k = \min(\varrho_k, \sigma$

($\delta_1 = 1$), so bestehen die Ungleichungen

$$|\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_k| \leq \delta_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n |\zeta_k|^m \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \right)^m.$$

Gy. Sz. Nagy (Szeged).

Markovitch, D.: Sur la limite inférieure des modules des zéros d'un polynôme. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 2, 236—242 u. serb. Zusammenfassg. 241—242 (1948).

Für eine Nullstelle $\varrho e^{i\varphi}$ des Polynoms $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ besteht die Ungleichung

$$|a_0| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \varrho^k = F(|a_k|, \varrho). \quad \text{Ist die Potenzreihe } \varphi(\varrho) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varrho^k, \quad b_k > 0$$

($k = 1, 2, \dots$) konvergent für $0 < \varrho < r$, so ist

$$\frac{|a_0|}{\varphi(\varrho)} < \frac{\sum_{k=1}^n |a_k| \varrho^k}{\sum_{k=1}^n b_k \varrho^k} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{b_k} b_k \varrho^k}{\sum_{k=1}^n b_k \varrho^k} = M.$$

Hier ist M ein Mittelwert der Zahlen $|a_k|/b_k$ mit positiven Koeffizienten (Gewichten) $b_k \varrho^k$. Daraus folgt die Ungleichung

$$\frac{|a_0|}{\varphi(\varrho)} < M \leq \text{Max} \left\{ \frac{|a_k|}{b_k} \right\} = \mu.$$

Hat die Funktion $\varphi(\varrho) - |a_0|/\mu$ im Intervall $(0, r)$ nur eine Nullstelle ϱ_0 , so ist ϱ_0 eine untere Schranke der absoluten Beträge der Nullstellen des Polynoms $f(z)$. —

Sind $b_k = \frac{1}{t^k}$ ($t > 0$), $\varphi(\varrho) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{t} \right)^k = \frac{\varrho}{t - \varrho}$ ($0 < \varrho < t$), so ist $\varrho_0 = \frac{|a_0| t}{|a_0| + \mu(t)}$, $\mu(t) = \text{Max} \{ |a_k| t^k \}$ ($1 \leq k \leq n$). Sind $a_k = b_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$), $b_k = 1$ ($k = m, m+1, \dots, n$), so ist $(\varrho - 1)\varphi(\varrho) = \varrho^m - 1$, $\varrho < 1$. Dann ist ϱ_0 die positive Wurzel der Gleichung $\frac{\mu}{|a_0|} \varrho^m + \varrho = 1$, wo $\mu = \text{Max} \{ |a_k| \}$ ($m \leq k \leq n$) ist. —

Verf. erhält auch andere Ausdrücke für die untere Schranke ϱ_0 , wenn $F(|a_k|, \varrho)$ in der ersten Ungleichung auf Grund bekannter Ungleichungen durch einen nicht kleineren Wert von $|a_k|$ und ϱ ersetzt wird.

Gy. Sz. Nagy (Szeged).

Marden, Morris: The zeros of certain real rational and meromorphic functions. Duke math. J. 16, 91—97 (1949).

Bekannte Sätze (von Jensen, Walsh und vom Ref.) über die Lage der Nullstellen der Derivierten eines reellen Polynoms $f(z)$ n -ten Grades und ihre Erweiterungen werden auf die Nullstellen eines reellen Polynoms verallgemeinert, für das

$F_1(z) = \frac{f_1(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{z - c_j}$, $c_j = a_j + i b_j$, $\gamma_j = \alpha_j + i \beta_j = m_j e^{i\mu_j}$ sind. Im allgemeinen kann angenommen werden, daß $b_j > 0$ für $1 \leq j \leq p \leq n/2$; $b_j = -b_{j-p}$, $\beta_j = -\beta_{j-p}$ für $p < j \leq 2p$; und $b_j = \beta_j = \mu_j = 0$ für $j > 2p$ sind. Bei der Annahme $|\mu_j| < \pi/2$ ist m_j positiv oder negativ. — Bezeichnet $K(c_j, \mu_j)$ ($j = 1, 2, \dots, p$) den Kreis über den konjugiert imaginären Punkten c_j und $\bar{c}_j^* = c_{j+p}$, dessen Mittelpunkt im Punkt $k_j = a_j + b_j \operatorname{tg} \mu_j$ ($j = 1, 2, \dots, p$) liegt, und sind $m_j > 0$ ($|\mu_j| < \pi/2$, $j = 1, 2, \dots, n$), so liegt jede reelle Nullstelle von $f_1(z)$ im kleinsten Intervall, das die reellen Nullstellen von $f(z)$ und die Mittelpunkte k_j der Kreise $K(c_j, \mu_j)$ enthält. Sind $m_j > 0$ für $j > 2p$, so hat das Polynom $f_1(z)$ keine nicht-reelle Nullstelle außerhalb sämtlicher Kreise $K(c_j, \mu_j)$ mit $m_j > 0$ und innerhalb sämtlicher Kreise $K(c_j, \mu_j)$ mit $m_j < 0$. — Der Satz über die Jensenschen Kreise hat folgende Verallgemeinerung: Sind $m_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) und $\mu_j \leq \omega < \pi/2$ ($j = 1, 2, \dots, p$), so liegt jede nichtreelle Nullstelle des Polynoms $f_1(z)$ innerhalb mindestens einer der Kreise C_j mit dem Mittelpunkt $\frac{1}{2}(c_j + \bar{c}_j^*)$ und mit dem

Durchmesser $\{c_j - c_j^*\} \operatorname{tg}(\pi/4 + \omega/2)$ ($j = 1, 2, \dots, p$). Die erhaltenen Resultate werden auf die Nullstellen der entsprechend definierten reellen Polynome einer Folge und auf die Nullstellen reeller meromorpher Funktionen verallgemeinert.

Gy. Sz.-Nagy.

Turán, P.: On the distribution of real roots of almost-periodical polynomials. Publ. Math., Debrecen 1, 38—41 (1949).

Bezeichnet $N(H, a, d)$ bzw. $N(R, a, d)$ die Anzahl der reellen Nullstellen des fastperiodischen Polynoms

$$H(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos \lambda_k x, \quad a_k > 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n,$$

$$\text{bzw. } R(x) = \sum_{k=1}^n b_k \sin \lambda_k x, \quad b_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n,$$

im Intervall $a - d \leq x \leq a$, so gilt die Ungleichung

$$N(H, a, d) \leq 6n \log \frac{24(|a| + d)}{d} + 6d\lambda_n \quad \text{bzw.} \quad N(R, a, d) \leq 1 + 6n \log \frac{24(|a| + d)}{d} + 6d\lambda_n.$$

Diese Ungleichungen lassen sich bei $H(x) = \cos \lambda x$ bzw. $R(x) = \sin \lambda x$ nicht verbessern.

Gy. Sz.-Nagy (Szeged).

Kac, M.: On the average number of real roots of a random algebraic equation. II. Proc. London math. Soc., II. S. 50, 390—408 (1948).

Es seien (1) $X_0 + X_1 x + X_2 x^2 + \dots + X_{n-1} x^{n-1} = 0$ eine algebraische Gleichung, in der die Koeffizienten X_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) unabhängige reelle zufällige Veränderliche mit der gleichen Verteilungsfunktion bedeuten. Die Anzahl der reellen Wurzeln von (1) sei mit R_n bezeichnet; R_n ist also auch eine zufällige Veränderliche, der Erwartungswert von R_n sei mit \bar{R}_n bezeichnet. In einer früheren Arbeit [Bull. Amer. math. Soc. 49, 314—320 (1943)] hat Verf. gezeigt, daß, wenn die Koeffizienten X_k normal verteilt sind, $\bar{R}_n \sim 2\pi^{-1} \log n$. In derselben Arbeit wurde ohne Beweis behauptet, daß dasselbe Ergebnis auch für den Fall gilt, daß a) die X_k gleichmäßig zwischen -1 und $+1$ verteilt sind und b) die X_k nur der Werte ± 1 mit gleicher Wahrscheinlichkeit fähig sind. In der vorliegenden Arbeit beweist Verf. dies für den Fall a); er bemerkt, daß er inzwischen fand, daß seine Methode für den Fall b) nicht angewendet werden kann. Der Beweis stützt sich auf folgende Darstellung der Anzahl $R(a, b)$ der reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ [wo nur vorausgesetzt ist, daß $f'(x)$ in (a, b) stetig ist und nur in endlich vielen Punkten verschwindet]:

$$(2) \quad R(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_a^b |f'(x)| \cos f(x) t \cdot dx dt$$

[mehrfache Wurzeln werden nur einmal gezählt, und, wenn die Endpunkte a oder b Wurzeln von $f(x) = 0$ sind, werden sie nur mit dem Gewicht $\frac{1}{2}$ mitgezählt]. Formel (2) ist in einer früheren Arbeit des Verf. [Amer. J. Math. 65, 609—615 (1943)] bewiesen. Es ist merkwürdig, daß im betrachteten Fall die vier Teilintervalle $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, +\infty)$ ungefähr die gleiche Anzahl von Wurzeln von (1) enthalten und daß „fast alle“ Wurzeln sich in den Punkten ± 1 häufen. A. Rényi.

Gruppentheorie:

Doss, Raouf: Sur l'immersion d'un semi-groupe dans un groupe. Bull. Sci. math., II. S. 72I, 139—150 (1948).

L'A. donne un cas d'immersion d'un semi-groupe dans un groupe, qui comprend comme cas particulier le semi-groupe régulier à droite (ou à gauche) de O. Ore [Ann. Math., Princeton, II. S. 32, 463 (1931)] ainsi que le cas „aussi irrégulier que possible“ signalé par Mme Dubreil-Jacotin [C. r. Acad. Sci., Paris 225, 787—788 (1947)]. — Un élément a d'un semi-groupe S est régulier à droite si a et un élément b quelconque

dans S admettent toujours un multiple commun à droite: $ar = bs$. S est appelé quasi-régulier à droite dans le cas suivant: quand deux éléments m et n ont un multiple commun à droite, on peut toujours choisir l'un des coefficients régulier à droite, c'est-à-dire $mp = nq$ entraîne $ma = nb$, où l'un des éléments a ou b est régulier. — L'A. démontre alors que: tout semi-groupe quasi régulier peut être plongé dans un groupe. Il utilise pour la démonstration les conditions d'immersion données par A. Malcev [Mat. Sbornik, n. S. 6, 331—336 (1939); ce Zbl. 22, 311]. Il serait intéressant d'avoir une construction plus directe du groupe obtenu.

L. Lesieur (Poitiers).

Baer, Reinhold: Die Schar der Gruppenerweiterungen. Math. Nachr., Berlin 2, 317—327 (1949).

Ist (G, η) eine Erweiterung von M durch E , also $G/M \cong E$ mit dem Homomorphismus $G\eta = E$, so entspricht jedem Element von E eine Automorphismenklasse von M (Kollektivcharakter von E in M), d. h. eine Nebenklasse der Automorphismengruppe von M nach dem Normalteiler der inneren Automorphismen. [Vgl. Verf., Math. Z. 38, 375—416 (1934); dies. Zbl. 9, 11.] Alle in M denselben Kollektivcharakter induzierenden Erweiterungen bilden eine Schar. [Für den Begriff der Schar vgl. z. B. Verf., J. reine angew. Math. 160, 199—207 (1929).] Jede Menge solcher Erweiterungen läßt sich einbetten in eine Erweiterung H einer geeigneten Gruppe N durch E [vgl. Verf., Ein Einbettungssatz für Gruppenerweiterungen, Arch. Math., Karlsruhe]. N läßt sich dabei immer als direkte Summe von M und einer freien abelschen Gruppe wählen. (Die Gruppenoperation wird in der vorliegenden Arbeit als Addition geschrieben, auch wenn sie nicht kommutativ ist.) Verf. geht von einer Erweiterung (H, η) von N durch E aus. Für einen Normalteiler M von N werden dann sog. M - E -Untergruppen von H betrachtet, d. h. Untergruppen G mit $H = N + G$, $M = N \cap G$, die sich also als Erweiterungen (G, η) von M durch E auffassen lassen. Ist N/M abelsch, so bilden die M - E -Untergruppen bezüglich der Operation $X - Y + Z$ eine kommutative Schar, wobei unter $X - Y + Z$ die Gesamtheit der Elemente $x - y + z$, x in X , y in Y , z in Z , $x\eta = y\eta = z\eta$ verstanden wird. — Unter einem N - E -Automorphismus von H verstehe man einen Automorphismus α von H mit $x\alpha = x$ für x in N , $x\alpha \equiv x \pmod{N}$ für jedes x in H . Sind X und Y zwei M - E -Untergruppen von H , so verstehe man unter einem M - E -Isomorphismus α von X auf Y einen solchen, für den $x\alpha = x$ für x in M , $x\alpha \equiv x \pmod{N}$ für x in X . Dies sind also genau die Erweiterungsisomorphismen zwischen den Erweiterungen (X, η) und (Y, η) . Es gelten folgende Sätze: Der M - E -Isomorphismus α der M - E -Untergruppe G auf die M - E -Untergruppe $G\alpha$ wird dann und nur dann durch einen N - E -Automorphismus von H induziert, wenn $x\alpha - x$ für jedes x in G im Zentrum $Z(N)$ von N liegt. Ist der Zentralisator von M in N in $Z(N)$ enthalten, so wird jeder M - E -Automorphismus einer M - E -Untergruppe durch genau einen N - E -Automorphismus von H induziert. Zwei M - E -Untergruppen X und Y heißen äquivalent, wenn es einen N - E -Automorphismus α mit $X\alpha = Y$ gibt. Die Klassen äquivalenter M - E -Untergruppen bilden eine Faktorschar. Ist $N = M + Z(N)$, so sind konjugierte M - E -Untergruppen äquivalent. — Sind für $i = 1, 2$ (H_i, η_i) Erweiterungen von $N_i = M + Z(N_i)$ durch E und Θ_i die Scharen der Klassen M - E -isomorpher M - E -Untergruppen von H_i , so wird definiert: x aus Θ_1 und y aus Θ_2 bilden ein M - E -Paar, wenn die M - E -Untergruppen X in x und Y in y miteinander M - E -isomorph sind. Es zeigt sich, daß diese Paarung eine Isomorphie zwischen den (eventuell leeren) Teilscharen von Θ_1, Θ_2 darstellt, die aus denjenigen Elementen bestehen, die überhaupt mit Elementen der anderen Schar gepaart sind. Diese Isomorphieaussage und der oben genannte Einbettungssatz des Verf. gestatten es, zu einem gegebenen Kollektivcharakter K von E in M die Schar $\Theta(K)$ aller Klassen M - E -isomorpher, diesen Kollektivcharakter induzierender Erweiterungen von M durch E zu konstruieren. — Eine natürliche Zahl p heißt Periode einer Schar S , wenn $p(x - y) + z = z$ für alle x, y, z aus S . Es wird bewiesen: Ist die Schar $\Theta(K)$ nicht leer, so ist eine natürliche Zahl n eine Periode von $\Theta(K)$, wenn E eine Gruppe der Ordnung n ist, oder wenn $nZ(M) = 0$ ist. Als Folgerung hieraus ergibt sich: Wenn es eine zu der endlichen Ordnung n von E teilerfremde Zahl m gibt mit $mZ(M) = 0$, so sind irgend zwei den gleichen Kollektivcharakter in M induzierende Erweiterungen von M durch E zueinander isomorph. Das ist eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von I. Schur.

R. Kochendörffer (Greifswald).

Prokof'ev, A. N.: Über den Fundamentalsatz von Frobenius. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 801—804 (1949) [Russisch].

In einer Gruppe werden Gleichungssysteme der Form

$$f(X_1, \dots, X_r, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_s) \subset \varphi(X_1, \dots, X_r, \mathfrak{A}_{s+1}, \dots, \mathfrak{A}_s)$$

betrachtet mit Unbestimmten X_1, \dots, X_r und „konstanten“ Komplexen $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_s$. § sei eine Untergruppe des Durchschnitts der Normalisatoren aller in den Gleichungen

vorkommenden konstanten Komplexe. Es werden Aussagen gemacht über die Anzahl der Lösungen, die einem Komplex der Form $\S G \S$ angehören. Insbesondere werden Gleichungssysteme vom Typ $X^n \in \mathfrak{A}$ betrachtet. Als Spezialfälle ergeben sich Anzahlsätze von Frobenius, Hall, Djubjuk und Černikov. Keine Beweise.

R. Kochendörffer (Greifswald).

Čarin, V.S.: Bemerkung über die Minimalbedingung für Untergruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 575—576 (1949) [Russisch].

Es wird ein Beispiel angegeben für eine auflösbare, lokal endliche Gruppe, in welcher die Minimalbedingung für Normalteiler, aber nicht für beliebige Untergruppen erfüllt ist.

R. Kochendörffer (Greifswald).

Hirsch, K. A.: On infinite soluble groups. III. Proc. London math. Soc., II. S. 49, 184—194 (1947).

Verf. setzt in dieser Arbeit das Studium der von ihm früher eingeführten S -Gruppen fort [s. Proc. London math. Soc. II. S. 44, 53—60, 336—344 (1938); dies. Zbl. 18, 145, 19, 156]. Bezeichnet man als nilpotent Gruppen, deren absteigende Zentrenreihe nach endlich vielen Schritten mit 1 endet, so gilt, daß die Vereinigung aller nilpotenten Normalteiler der S -Gruppe G selbst ein nilpotenter Normalteiler $B = B(G)$ von G ist; und der Zentralisator von B in G ist in B enthalten. Weiter enthält jede S -Gruppe G wenigstens einen Normalteiler N derart, daß G/N endlich ist, während N kein von 1 verschiedenes Element endlicher Ordnung enthält. Schließlich wird die Äquivalenz folgender Eigenschaften der S -Gruppe G erwiesen: a) G ist nilpotent; b) maximale Untergruppen von G sind Normalteiler; c) jede Untergruppe von G [mit Ausnahme von G] ist von ihrem Normalisator verschieden; d) alle endlichen Faktorgruppen von G sind nilpotent. [Einige dieser Äquivalenzen sind Spezialfälle bekannter Sätze; siehe z. B. Ref.: Nilpotent groups and their generalizations; Trans. Amer. math. Soc. 47, 393—434 (1940); dies. Zbl. 23, 300 und O. Schmidt: Über unendliche spezielle Gruppen, Mat. Sbornik, n. S. 8, 363—375 (1940); dies. Zbl. 24, 254.]

Reinhold Baer (Urbana, Ill.).

Taunt, D. R.: On A -groups. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 24—42 (1949).

A -Gruppen sind auflösbare Gruppen endlicher Ordnung, deren Sylow-Gruppen sämtlich Abelsch sind. In seiner Arbeit „The construction of soluble groups“ [J. reine angew. Math. 182, 206—214 (1940); dies. Zbl. 23, 30] hat Ph. Hall einige grundlegende Eigenschaften solcher Gruppen ohne Beweise angekündigt. Die vorliegende Arbeit gibt im wesentlichen die Beweise dieser Sätze und untersucht darüber hinaus besondere Eigenschaften von Gruppen kubus-freier Ordnung. Die Kenntnis der Begriffe, Definitionen und Resultate von Halls Theorie der auflösbaren Gruppen [loc. cit. und Proc. London math. Soc., II. S. 43, 507—528 (1937); dies. Zbl. 18, 10; hier auch Zusammenstellung der vorangehenden Arbeiten] sind für das Verständnis der Tauntschen Arbeit erforderlich. — Sei G eine A -Gruppe; $G = L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_n = 1$ ihre absteigende nilpotente Reihe, d. h. L_{i+1} minimaler Normalteiler von L_i mit nilpotenter Faktor-Gruppe; $1 = U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_n = G$ ihre aufsteigende nilpotente Reihe, d. h. U_{i+1}/U_i das Erzeugnis aller nilpotenten Normalteiler von G/U_i ; Z_1 das Zentrum, Z_∞ das Hyperzentrum von G ; G' die Kommutator-Gruppe. — Die wichtigsten Ergebnisse sind die folgenden: Alle nilpotenten Faktoren der A -Gruppe G sind Abelsch. Daher stimmt die absteigende nilpotente Reihe mit der Kommutator-Reihe überein; insbesondere ist $G' = L_1$. In der aufsteigenden nilpotenten Reihe ist das erste Glied U_1 Abelsch und enthält also alle Abelschen Normalteiler von G . Übrigens ist U_1 direktes Produkt der Zentren der verschiedenen Glieder der absteigenden nilpotenten Reihe von G : $U_1 = Z_1(G) \times Z_1(L_1) \times \dots \times Z_1(L_{n-1})$. Das Zentrum Z_1 von G stimmt mit dem Hyperzentrum Z_∞ überein. Der Durchschnitt des Zentrums Z_1 von G mit der Kommutator-Gruppe G' besteht nur aus dem Einheits-Element. Hieraus folgen eine Reihe weiterer Eigenschaften, von denen die folgenden erwähnt sein mögen: Die Kommutator-Gruppe vermeidet alle zentralen Faktoren von G . Wenn K die Kommutator-Gruppe eines Normalteilers H von G ist, dann ist K komplementär in G zu jedem System-Normalisator $M_G(H)$ von H in G . Insbesondere ist jeder System-Normalisator von L_{i-1} $M_G(L_{i-1})$ (relativ zu G) komplementär zu L_i ; und jeder absolute System-Normalisator von G ist komplementär zu der Kommutator-Gruppe G' . Die Gesamtzahl der verschiedenen Sylow-Systeme ist gleich der Ordnung von G' . — Ferner gilt für A -Gruppen ein Basis-Satz: Jede A -Gruppe G enthält ein System von Untergruppen G_1, G_2, \dots, G_e mit den folgenden Eigenschaften: 1. von je zwei Gruppen G_i, G_j ist zumindest eine in dem Normalisator der anderen enthalten. Also sind alle G_i

vertauschbar. 2. Das Produkt der G_i ist G . Jedes Element von G ist eindeutig darstellbar in der Form $g_1 g_2 \dots g_r$ mit $g_i \in G_i$. Das Produkt irgendeiner Teilmenge der G_i ergibt eine Untergruppe, die in G zu dem Produkt der übrigen G_i komplementär ist. 3. Jedes G_i ist Abelsch von Primzahl-Potenz-Ordnung $p^{\alpha_i \beta_i}$ mit lauter gleichen Invarianten $(\alpha_i, \alpha_i, \dots, \alpha_i)$. Es gibt eine Hauptreihe für G mit der Eigenschaft, daß jeder Faktor gerade von einem G_i bedeckt und allen anderen vermieden wird, so daß G_i α_i verschiedene Faktoren, je der Ordnung p^{β_i} , bedeckt. Die Sylow-Gruppen von G , die Glieder der absteigenden nilpotenten Reihe L_i und die kompletten System-Normalisatoren $M_{L_j}(L_k)$, $j < k$, können als solche Produkte von G_i s erhalten werden. — Im letzten Abschnitt untersucht Verf. die Gruppen kubus-freier Ordnung. Diese sind bei ungerader Ordnung immer auflösbar, also A -Gruppen, bei gerader sicher dann, wenn sie keine Tetraeder-Gruppe als Untergruppe enthalten. Die „Länge“ einer auflösbaren kubus-freien Gruppe kann für ungerade Ordnung 2, für gerade Ordnung 3 nicht überschreiten. Wenn sie 3 beträgt, so sind die Sylow-Gruppen von L_2 elementar-Abelsch vom Typ (p, p) , wobei p eine Primzahl ≥ 5 ist. In einer auflösbaren Gruppe kubus-freier Ordnung ist jedes Komplement von L_1 ein absoluter System-Normalisator, und jedes Komplement von L_2 ein relativer System-Normalisator $M_G(L_1)$. Für allgemeine A -Gruppen trifft dies nicht zu, wie Verf. mit einem Beispiel einer Gruppe der Ordnung $2 \cdot 7 \cdot 13^3$ belegt. K. A. Hirsch (Newcastle-upon-Tyne).

Foulkes, H. O.: A note on s -functions. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 20, 150—152 (1949).

The au. obtains the characteristics of the classes of the group $\mathfrak{S}(n)$ in which all the cycles are divisible by r from the characters of the group $\mathfrak{S}(n/r)$ by expressing symmetric functions of $\varepsilon^i x_j$ ($0 \leq i \leq r-1$, $1 \leq j \leq r$) in terms of symmetric functions of x_j^r ($1 \leq j \leq r$), (ε primitive r -root of 1). Jean Braconnier (Lyon).

● **Peremans, Wouter:** Endliche binäre projektive Gruppen. Dissert. 'S-Gravenhage: Excelsiors Foto-Offset 1949. 52 S. und engl. Zusammenfassg. 53—54 [Holländisch].

Die endlichen binären projektiven Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} der Charakteristik 0 sind bekanntlich die Kleinschen Polyedergruppen. In der vorliegenden Arbeit wird der Fall eines beliebigen kommutativen Grundkörpers \mathbb{K} erledigt. Dabei sind im wesentlichen zwei Ergebnisse hervorzuheben: 1. Bei Körpercharakteristik p treten neben den Polyedergruppen neue endliche Gruppen auf, die im Gegensatz zu den Polyedergruppen parabolische Substitutionen enthalten. Es wurden die möglichen Typen dieser Gruppen bestimmt, und es wird ihre Existenz durch die Aufstellung gewisser kanonischer Normalformen nachgewiesen. Dabei zeigt es sich, daß — anders als bei den Polyedergruppen — isomorphe Gruppen vorkommen, die nicht in der Gruppe aller binären projektiven Transformationen konjugiert sind. — 2. Die Frage, über welchen Grundkörpern \mathbb{K} die verschiedenen endlichen binären Gruppen ohne vorherige endliche algebraische Erweiterung von \mathbb{K} dargestellt werden können, führt bei den Gruppen mit parabolischen Substitutionen auf ziemlich triviale, notwendige und hinreichende Bedingungen. Ein interessantes Resultat dagegen erhält man bei den Polyedergruppen: Ihre Darstellung über dem gegebenen, unerweiterten Grundkörper \mathbb{K} ist dann und nur dann möglich, wenn \mathbb{K} einen Zerfällungskörper des Quaternionenschiefkörpers bildet. Die Bedeutung dieser Bedingung, vor allem im Falle eines endlichen algebraischen Zahlkörpers \mathbb{K} , wird am Schlusse der Arbeit näher untersucht. Krull (Bonn).

Szépál, I.: Die unendlichen Abelschen Gruppen mit lauter endlichen echten Untergruppen. Publ. Math., Debrecen 1, 63—64 (1949).

Wenn der Typus der abelschen Gruppen mit den Erzeugenden A_n und den Relationen $pA_1 = 0$, $pA_2 = A_1$, $pA_3 = A_2$, ... mit (p^∞) bezeichnet wird — p beliebige Primzahl —, so zeigt Verf., daß die abelschen Gruppen vom Typus (p^∞) die einzigen sind, die nur endliche echte Untergruppen haben. Ulm (Münster).

Ellis, David: Superposability properties of naturally metrized groups. Bull. Amer. math. Soc. 55, 639—640 (1949).

Abstand der Elemente a und b in der additiven abelschen Gruppe A ist nach Menger das Paar $a-b$, $b-a$. Verf. zeigt, daß jede abstanderhaltende Abbildung

einer Teilmenge S von A auf eine Teilmenge T von A durch eine abstanderhaltende Abbildung von A auf sich induziert wird. *Reinhold Baer* (Urbana, Ill.).

Paige, L. J.: A note on finite abelian groups. *Bull. Amer. math. Soc.* **53**, 590—593 (1947).

Sind $\eta(x)$ und $\Theta(x)$ eineindeutige Abbildungen einer endlichen abelschen Gruppe G auf sich, so wird die Frage nach der Existenz solcher Abbildungen, die außerdem der Beziehung $\eta(x) = x \cdot \Theta(x)$ genügen sollen, vollständig durch folgenden Satz beantwortet: Dann und nur dann, wenn G nicht genau ein Element der Ordnung 2 enthält, gibt es eine eineindeutige Abbildung $\Theta(x)$ von G auf sich, so daß $x \cdot \Theta(x)$ ebenfalls eine eineindeutige Abbildung $\eta(x)$ von G auf sich wird. Darüber hinaus wird gezeigt, daß im ausgeschlossenen Fall — G enthält genau ein Element der Ordnung 2 — es eine eineindeutige Abbildung $\Theta(x)$ gibt, so daß $\eta(x) = x \Theta(x)$ genau $n - 1$ verschiedene Werte annimmt, wenn n die Ordnung von G ist. Anwendungsmöglichkeiten: s. R. H. Bruck, *Trans. Amer. mat. Soc.* **55**, 19—52 (1944). *Ulm* (Münster).

Yeh, Yenchien: On prime power abelian groups. *Bull. Amer. math. Soc.* **54**, 323—327 (1948).

Anschließend an G. A. Miller (vgl. dies. Zbl. **21**, 209) bestimmt Verf. die Anzahl der Untergruppen von gegebenem Typus einer abelschen Gruppe, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist. Während Miller die Anzahlformel nur im Fall spezieller Typen von Untergruppen explizit angibt und sich im allgemeinen Fall auf einen Analogiehinweis beschränkt, wird hier eine explizit angegebene Formel nach einer von der Millerschen Methode verschiedenen bewiesen. Hinsichtlich der bezeichnungstechnisch komplizierten Formel vgl. die Arbeit. *Ulm* (Münster).

Szele, T.: Über die direkten Teiler der endlichen Abelschen Gruppen. *Comment. math. Helvetici* **22**, 117—124 (1949).

In der Arbeit wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß eine Untergruppe H direkter Teiler einer endlichen abelschen Gruppe G ist. Verf. fügt in einer nachträglichen Anmerkung hinzu, daß diese Bedingung eine unmittelbare Konsequenz eines wesentlich allgemeingültigeren Satzes von H. Prüfer über abzählbar primäre abelsche Gruppen ist, der im Spezialfall der endlichen Gruppen besagt, daß jeder direkte Teiler Servanzuntergruppe ist und umgekehrt [H. Prüfer, *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen. Math. Z.* **17**, 35—61 (1923)]. *Ulm* (Münster).

Haimo, F.: Preservation of divisibility in quotient groups. *Duke math. J.* **15**, 347—356 (1948).

Hauptziel der Arbeit ist der Nachweis, daß gewisse abelsche Gruppen niemals kompakte topologische Gruppen sein können. Demgemäß stellt der erste Teil der Arbeit eine Untersuchung der algebraischen Struktur unendlicher abelscher Gruppen dar. Neben der Darstellung der Ergebnisse älterer Arbeiten handelt es sich in der Hauptsache um eine Weiterführung der Resultate von E. Liapin [*Mat. Sbornik*, n. S. **8**, 205—237 (1940)]. Im zweiten Teil wird gezeigt, daß die topologische Struktur, z. B. Kompaktheit, eine wesentliche Einschränkung hinsichtlich der algebraischen Struktur einer unendlichen abelschen Gruppe zur Folge hat. Die große Zahl der so gewonnenen Sätze im einzelnen aufzuführen ist wegen der z. T. umfangreichen Voraussetzungen in diesen hier nicht möglich, vgl. dazu die Arbeit. *Ulm*.

Gleason, Andrew M.: On the structure of locally compact groups. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **35**, 384—386 (1949).

En s'appuyant sur des résultats de Kuranishi et de lui-même, l'A. démontre le Théorème 1: Un groupe topologique G possédant un sous-groupe invariant fermé N de Lie tel que G/N soit de Lie est de Lie. L'A. appelle groupe de Lie généralisé un groupe localement compact dont un sous-groupe ouvert est limite projective de

groupes de Lie et formule plusieurs propositions relatives à cette notion, notamment l'analogie du Théorème 1. Il énonce ensuite des propriétés des groupes localement compacts; par exemple: un groupe localement compact, connexe a un plus grand sous-groupe invariant résoluble; si ce dernier se réduit à l'unité, le groupe est produit direct de groupes indécomposables métrisables qui, sauf au plus un nombre fini d'entre eux, sont des groupes de Lie simples compacts. — Plusieurs des théorèmes de l'A. (dont le théorème 1) se trouvent, démontrés, dans un travail de K. Iwasawa [Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 507—558 (1949)]. A. Borel (Paris).

Verbände. Ringe. Körper:

Cuesta, N.: *Strukturen und ihre Automorphismen*. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 277—282 (1948) [Spanisch].

Verf. definiert: Ein Verband (conjunto) besitzt eine Struktur, wenn zwischen seinen Elementen gewisse Relationen definiert sind. Solche Strukturen sind z. B. die Anordnungen (Relation: $a < b$), Gruppen (Relation: $a = b \cdot c$), die projektiven Räume (Relation: a liegt in b) usw. Zwei Strukturen heißen isomorph oder von gleichem Typus, wenn zwischen den zugehörigen Verbänden eine eindeutige Korrespondenz möglich ist, in der Elementen des ersten, die durch seine strukturelle Relation verknüpft sind, Elemente des zweiten entsprechen, die durch dessen Relation verknüpft sind, und umgekehrt. Die Isomorphismen einer Struktur mit sich selbst heißen Automorphismen. — Wenn die Strukturen zweier Verbände isomorph sind, so sind auch ihre Gruppen von Automorphismen isomorph. Verf. stellt zwei Fragen: 1. Folgt aus dem Isomorphismus der Gruppen von Automorphismen zweier Strukturen der Isomorphismus dieser Strukturen selbst? 2. Sind zwei auf Körpern von verschiedenem Typus basierende projektive Räume möglich, deren Automorphismengruppen isomorph sind? Verf. beweist, daß die erste Frage verneint werden muß. Die Antwort auf die zweite Frage bleibt offen. Zacharias (Quedlinburg).

Grayev (Graev), M.: *Isomorphisms of direct decompositions in Dedekind's structures*. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 11, 33—45 und engl. Zusammenfassg. 45—46 (1947) [Russisch].

Zwei Sätze über die Existenz ähnlicher Verfeinerungen für direkte Zerlegungen der Einheit in vollständigen Dedekind-Strukturen, in Fortführung der Arbeiten von A. Kurosch [dieselben Izvestija 7, 185—202 (1943) und 10, 47—72 (1946)].

K. A. Hirsch (Newcastle-upon-Tyne).

Vandiver, H. S.: *On a p -adic representation of rings and abelian groups*. Ann. Math., Princeton, II. S. 48, 22—28 (1947).

S sei eine kommutative Halbgruppe mit Operatorenbereich, und zwar ist der Operatorenbereich ein Halbring R , d. h. ein System, welches hinsichtlich einer Addition und ebenso hinsichtlich einer Multiplikation kommutative Halbgruppe ist, wobei Addition und Multiplikation durch ein Distributivgesetz verknüpft sind und ein Einheits-element existiert, das auch Einheitsoperator ist. Ein System ω_i von Elementen aus S heißt dann Basis, wenn sich jedes Element aus S als endliche Summe $\sum a_k \omega_k$, a_k aus R , schreiben läßt und zwar eindeutig in dem Sinne, daß aus $\sum a_k \omega_k = \sum b_k \omega_k$ folgt $a_k \omega_k = b_k \omega_k$ für alle k . Es wird der Basissatz für eine abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden und einem Hauptidealring als Operatorenbereich in der folgenden Gestalt bewiesen. Ist (P) ein Primideal in R und gibt es zu der ganzen Zahl α ein A aus S mit $P^{\alpha-1} A \not\equiv 0 \pmod{P}$, so gibt es ein System von Elementen A_k aus S derart, daß in der Form $\sum_{c=0}^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{e_c} x_{ck} P^c A_k$ alle mod. P^α inkongruenten Elemente von S eindeutig darstellbar sind, wenn die x_{ck} unabhängig ein volles Restsystem mod. P durchlaufen, wobei $e_{c-1} \geq e_c$. Diese Darstellung heißt p -adische der Gruppe; durch eine geeignete andere Wahl der A_k

gelangt man zu einer weiteren, die als direkte Zerlegung der Gruppe S in eine Summe „zyklischer“ Gruppen bezeichnet werden kann. Schließlich werden Anwendungen dieser Sätze gebracht.

Ulm (Münster).

Kuročkin, V. M.: Ringe mit Minimalbedingung für Additionsideale. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 549—551 (1949) [Russisch].

Additions-Rechtsideal eines Ringes \mathfrak{A} heißt eine Teilmenge I mit folgenden Eigenschaften: Aus $a, b, c \in I$ folgt $a + b - c \in I$, und aus $a \in I, x \in \mathfrak{A}$ folgt $a \circ x = a + x - ax \in I$. [Vgl. V. A. Andrunakievič, dies. Zbl. 29, 248.] Es wird bewiesen: In einem halbeinfachen Ring mit Minimalbedingung für Additions-Rechtsideale gilt auch die Minimalbedingung für gewöhnliche Rechtsideale. Ein Ring heißt bezüglich der Additionsideale einfach, wenn er kein echtes zweiseitiges derartiges Ideal enthält. Ein Ring mit Minimalbedingung für Additions-Rechtsideale ist dann und nur dann bezüglich der Additionsideale einfach, wenn er ein radikaler Ring ist.

R. Kochendörffer (Greifswald).

Dubreil, Paul: Sur quelques problèmes concernant les variétés algébriques et la théorie des syzygies des idéaux de polynomes. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 11—12 (1949).

Verf. bespricht die Arbeit des Ref. „Über die Syzygientheorie der Polynom-ideale“ (dies. Zbl. 31, 201) und stellt die interessante Tatsache fest, daß die von Macaulay (Algebraic theory of modular systems, Cambridge 1916) zuerst eingeführten „perfekten“ Ideale, deren Charakterisierung durch ihre Syzygienketten in der Arbeit des Ref. behandelt wurde, mit den vom Verf. als „vollständig von 1. Gattung“ definierten Idealen (idéaux complètement ou absolument de première espèce) übereinstimmen. Verf. hat diese Ideale in mehreren Arbeiten seit 1934 untersucht (dies. Zbl. 8, 129; 11, 268; 14, 391; 30, 295), desgleichen M. R. Apéry [C. r. Acad. Sci., Paris 220, 234—236, 271—272 (1945); 221, 436—438 (1947) und Thèse, Paris, 1947], allerdings ohne die vorausgehenden Begriffsbildungen und Sätze Macaulays zu bemerken. Insbesondere ist der vom Verf. in der vorliegenden Arbeit für sich beanspruchte Satz, daß jedes perfekte Ideal ungemischt ist, bereits von Macaulay (l. c. p. 99) ausgesprochen und bewiesen worden. Die vom Ref. offen gelassene Frage, ob ein Ideal \mathfrak{a} immer dann perfekt sei, wenn (\mathfrak{a}, φ) für jede zu \mathfrak{a} relativ prime Form φ ungemischt ist, behauptet Verf. bereits im negativen Sinn entschieden zu haben. Verf. kritisiert ferner die Formulierung des Noetherschen Fundamentalsatzes und die Anwendungen auf Matrizenideale in der Arbeit des Ref.

Gröbner (Innsbruck).

Tihomirov (Tichomirov), A.: A generalization of Malcev's theorem on cleft algebras. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 11, 47—57 und engl. Zusammenfassg. 58 (1947) [Russisch].

Es werden Algebren G i. a. unendlichen Ranges betrachtet, die folgende Eigenschaften besitzen: Ihr Radikal R ist nilpotent, G/R hat endlichen Rang, und die einfachen Bestandteile des Zentrums von G/R sind separabel. In Verallgemeinerung einer Ergänzung von Mal'cev [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 36, 46—50 (1942)] zu einem bekannten Satz von Dickson wird bewiesen: In je zwei Zerfällungen $G = R + \mathfrak{A} = R + \mathfrak{A}'$ sind \mathfrak{A} und \mathfrak{A}' isomorph. Dieser Isomorphismus hat folgende Gestalt $a \rightarrow a - ar - r'a + r'ar$, wobei $r \in R$ und $rr' = r'r = r + r'$.

R. Kochendörffer (Greifswald).

Schafer, R. D.: The Wedderburn principal theorem for alternative algebras. Bull. Amer. math. Soc. 55, 604—614 (1949).

On démontre, pour les algèbres alternatives, le théorème qui correspond au théorème principal de Wedderburn pour les algèbres associatives; c'est-à-dire on prouve: Si \mathfrak{A} est une algèbre alternative, sur un corps \mathbb{K} , avec \mathfrak{A} comme radical et telle que $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}$ soit séparable, on a $\mathfrak{A} = \mathfrak{S} + \mathfrak{A}$, où \mathfrak{S} est équivalente à $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}$. La démonstration est faite parallèlement à celle du cas associatif. Ancochea (Madrid).

Albert, A. A.: Almost alternative algebras. *Portugaliae Math.* 8, 23—36 (1949).

Une algèbre \mathfrak{A} , sur un corps \mathfrak{K} de caractéristique $\neq 2$, est dite quasialternative à gauche si: (I) Pour x, y, z quelconques dans \mathfrak{A} on a

$$(*) z(xy) = \alpha(zx)y + \beta(zy)x + \gamma(xz)y + \delta(yz)x + \varepsilon y(zx) + \eta x(zy) + \sigma y(xz) + \tau x(yz)$$

où les coefficients sont des éléments fixes de \mathfrak{K} ; (II) tout $x \in \mathfrak{A}$ satisfait la relation $xx^2 = x^2x$; et (III) il existe une algèbre \mathfrak{B} avec élément unité, qui satisfait (*) et qui n'est pas commutative. D'une façon analogue on définit les algèbres quasialternatives à droite en substituant, dans (*), $z(xy)$ par $(xy)z$. Les algèbres alternatives à droite étudiées par l'A. [*Ann. Math.*, Princeton, II. S. 50, 318—328 (1949); ce Zbl. 32, 155] sont des cas particuliers d'algèbres quasialternatives à droite. Si une algèbre est quasialternative à gauche et à droite, on dit simplement qu'elle est quasialternative. L'A. donne une classification de ces algèbres par rapport à une relation d'équivalence qu'il appelle quasiéquivalence. Deux algèbres \mathfrak{A} et \mathfrak{B} , sur un même corps \mathfrak{K} , qui comme des modules sur \mathfrak{K} soient isomorphes, seront dites quasiéquivalentes si le produit $x \cdot y$ dans \mathfrak{B} peut être exprimé en termes du produit xy dans \mathfrak{A} par la relation: $x \cdot y = \lambda xy + (1 - \lambda)yx$, où $\lambda \neq 1/2$ appartient à \mathfrak{K} . On prouve que, si \mathfrak{A} est quasialternative à gauche, pour qu'une autre \mathfrak{B} quasiéquivalente à \mathfrak{A} soit aussi quasialternative à gauche il faut et il suffit que \mathfrak{A} soit quasialternative. Le résultat principal du mémoire est le suivant: Une algèbre quasialternative \mathfrak{A} est, dans une extension quadratique scalaire de \mathfrak{K} , quasiéquivalente à une algèbre alternative à gauche; sauf peut-être si $\alpha + \beta = 3/4$ ou si \mathfrak{A} est quasiéquivalente à une algèbre \mathfrak{A}' avec $\alpha' = 1, \beta' = 0$. En outre, pour y avoir d'exception il faut que \mathfrak{A} soit flexible ou Lie-admissible [une algèbre est flexible si $x(yx) = (xy)x$; pour ce qui concerne les algèbres Lie-admissibles voir la note d'Albert, recensée ci-dessous]. Parmi les exceptions possibles se trouvent les algèbres pour lesquelles $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma^2 - \delta^2 + \delta = 1$, qui l'A. nomme algèbres du type (γ, δ) . Pour celles-ci il considère quelques aspects de leur structure: le radical et la décomposition par rapport à un idempotent; cette dernière donne un critère pour l'existence d'une algèbre du type (γ, δ) qui ne serait pas quasiéquivalente à une algèbre alternative à gauche.

Ancochea (Madrid).

Albert, A. A.: Power-associative rings. *Trans. Amer. math. Soc.* 64, 552—593 (1948).

Ein ausführliches Eingehen auf die Ergebnisse dieser Arbeit erübrigt sich heute auf Grund der inzwischen erschienenen, anschließend referierten Arbeit über spurzulassende Algebren.

Hasse (Berlin).

Albert, A. A.: A theory of trace-admissible algebras. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* 35, 317—322 (1949).

Verf. ordnet frühere Strukturuntersuchungen über Jordansche Algebren, rechts-alternative Algebren und potenz-assoziative Ringe [dies. Zbl. 29, 10, vorsteh. und folgendes Referat], in denen wesentliches Hilfsmittel vielfach die Verwendung einer Spurfunktion war, einem neuen allgemeinen Begriff unter. Er redet von einer spurzulassenden potenz-assoziativen Algebra A über einem Körper Ω (dessen Charakteristik von 2, 3, 5 verschieden vorausgesetzt wird), wenn es in A eine bilineare Funktion $\sigma(x, y)$ (Spurfunktion) mit Werten aus Ω derart gibt, daß $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$, $\sigma(x, yz) = \sigma(xy, z)$, $\sigma(e, e) \neq 0$ für Idempotente e , $\sigma(x, y) = 0$ für nilpotente Produkte xy . Er nennt A halbeinfach, wenn das Radikal (maximale Nilideal) 0 ist, und einfach, wenn zudem A und 0 die einzigen A -Ideale sind. Unter $A^{(\times)}$ versteht er die A zugeordnete kommutative Algebra mit der modifizierten Produktdefinition $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. — Mit A ist auch $A^{(\times)}$ spurzulassend (unter Erhaltung der Spurfunktion). Ist A halbeinfach, so ist $A^{(\times)}$ eine halbeinfache Jordansche Algebra, und A ist biegsam, sowie

eindeutig als direkte Summe einfacher Algebren A_i darstellbar, für welche die $A_i^{(\times)}$ einfache Jordansche Algebren sind. Ist A einfach vom Rang n und die Charakteristik von Ω keine Primzahl $\leq n$, so ist A entweder eine einfache Jordansche Algebra oder biegsam vom Grad 2 oder quasi-assoziativ; letzteres bedeutet, daß A aus einer assoziativen Algebra durch Modifikation der Produktdefinition zu $x \cdot y = \lambda xy + (1 - \lambda) yx$ mit geeignetem Parameter λ aus Ω (oder aus einer quadratischen Erweiterung von Ω) entsteht. Hasse (Berlin).

Albert, A. A.: On right alternative algebras. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 318—328 (1949).

Eine Algebra heißt alternativ, wenn das Assoziativgesetz für alle Produkte mit zwei gleichen Faktoren erfüllt ist. Von den drei dies ausdrückenden Regeln $y \cdot xx = yx \cdot x$, $xx \cdot y = x \cdot xy$, $xy \cdot x = x \cdot yx$ folgt jede aus den beiden anderen. Algebren, für die nur $xy \cdot x = x \cdot yx$ gefordert wird, heißen biegsam (flexible); Verf. hat für sie einige Eigenschaften in einer vorangehenden Arbeit hergeleitet [s. oben, vorletztes Referat]. Hier untersucht er Algebren, für die nur $y \cdot xx = yx \cdot x$ gefordert wird: er nennt sie rechts-alternativ. Dabei beschränkt er sich auf Koeffizientenkörper von 2 verschiedener Charakteristik. Er beweist folgende Tatsachen. Jede rechts-alternative Algebra A ist potenz-assoziativ. Ist e ein Idempotent aus A , so gilt für den der Rechtsmultiplikation mit e entsprechenden linearen Operator R_e die Relation $R_e^2 = R_e$. Für den der Linksmultiplikation mit e entsprechenden linearen Operator L_e gilt jedenfalls $L_e^2 \neq 0$, $(L_e^2 - L_e)^2 = 0$; es gibt Fälle, in denen letzteres die Minimalgleichung für L_e ist, so daß A sicher nicht immer auch alternativ schlechthin ist. Hat A den Grad 2, so ist A alternativ. Allgemein wird A durch die neue Produktdefinition $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ eine Jordansche Algebra $A^{(\times)}$ (d. h. eine solche, in der als Assoziativregel nur $x \cdot yx^2 = xy \cdot x^2$ gefordert wird) zugeordnet. Auch der lineare Raum $R(A)$ der Rechtsmultiplikatoren R_x von A ist eine Jordansche Algebra, und $x \rightarrow R_x$ ist ein Homomorphismus von $A^{(\times)}$ auf $R(A)$, dessen Kern das Ideal Z der z mit $zA = 0$ ist: für die Restalgebra $B = A - Z$ ist danach $B^{(\times)}$ zu $R(B)$ isomorph. — Schließlich sei die Charakteristik sogar als 0 vorausgesetzt. Ist dann $A^{(\times)}$ einfach, so ist A alternativ, und, falls der Grad größer als 2 ist, sogar assoziativ. Allgemein fällt das Radikal (maximale Nilideal) N von A mit dem von $A^{(\times)}$ zusammen. Ist $N = 0$, also A halbeinfach, so ist A alternativ. Ist A einfach, so ist A entweder assoziativ oder eine Cayleysche Algebra. Die einzigen nicht-assoziativen rechts-alternativen Divisionsalgebren sind danach die Cayleyschen Algebren.

Hasse (Berlin).

Koszul, Jean Louis: Sur l'homologie et la cohomologie des algèbres de Lie. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 288—290 (1949).

Koszul, Jean Louis: Sur la cohomologie relative des algèbres de Lie. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 457—459 (1949).

Soit a une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0, a' le dual de a et, si $x \in a$, $\iota(x)$ l'opérateur $\alpha' \rightarrow x \lrcorner \alpha'$ de $A(a')$, $e(x)$ l'opérateur $y \rightarrow x \wedge y$ de $A(a)$, transposé de $\iota(x)$, ∂ l'opérateur „bord“ de $A(a)$ défini par $\partial(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_p$,

δ l'opérateur de $A(a')$ transposé de $-\partial$. δ est une antiderivation et $\delta\partial = 0$; δ définit donc sur $A(a')$ une algèbre de cohomologie $H(a)$ appelée l'algèbre de cohomologie de a . $\theta_x = \iota(x)\delta + \delta\iota(x)$ est une dérivation de $A(a')$ et $\alpha' \in A(a')$ est dite invariante par $b \subset a$ si $\theta_x(\alpha') = 0$ pour tout $x \in b$. $a \in H(a)$ est dit primitif si sa composante dans $H^0(a)$ est nulle et si $\iota(u) \cdot a \in H^0(a)$ pour tout $u \in a$ tel que $e(u) = 0$, invariant par a et dont la composante dans $A^0(a)$ est nulle. Une sous-algèbre $b \subset a$ est dite réductive dans a si les θ_x ($x \in b$) forment une famille complètement réductible. Si a est réductive, a est produit d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre abélienne; les composantes non nulles d'un élément primitif de $H(a)$ sont de degré impair et l'isomorphisme identique du sous-espace P des éléments primitifs de $H(a)$ se prolonge en un isomorphisme de $A(P)$ sur $H(a)$ [généralisation

d'un théorème de Hopf, Ann. Math., Princeton, II. S. 42, 22—52 (1941)]. [La démonstration s'appuie sur le lemme suivant: si $\beta \in A^p(\mathfrak{b})$ et si $\alpha \in A(\mathfrak{a})$ est invariant par \mathfrak{b} , alors $\partial \cdot ((\varphi \cdot \beta) \wedge \alpha) = (\partial \varphi \cdot \beta) \wedge \alpha + (-1)^p (\varphi \cdot \beta) \wedge (\partial \cdot \alpha)$, φ homomorphisme de \mathfrak{b} dans \mathfrak{a}]. Soit \mathfrak{b} une sous-algèbre de \mathfrak{a} ; si φ est l'isomorphisme de \mathfrak{b} dans \mathfrak{a} , le noyau B_1 de φ est engendré par l'ensemble R_1 des $x' \in \mathfrak{a}'$ orthogonaux à \mathfrak{b} ; soit $L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ la sous-algèbre de $A(\mathfrak{a}')$ formée par les éléments de $A(R_1)$ invariants par \mathfrak{b} ; $L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est stable pour δ et δy définit une algèbre de cohomologie $H(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ appelée l'algèbre de cohomologie de \mathfrak{a} relative à \mathfrak{b} [cf. Chevalley et Eilenberg, ce Zbl. 31, 248]; l'isomorphisme identique de $L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ dans $A(\mathfrak{a}')$ induit une représentation ${}^t\tilde{\pi}$ de $H(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ dans $H(\mathfrak{a})$. Si \mathfrak{a} est réductive, l'image de ${}^t\tilde{\pi}$ est une sous-algèbre de $H(\mathfrak{a})$ engendrée par l'unité et des éléments primitifs [généralisation d'un th. de Samuelson Ann. Math., Princeton, II. S. 42, 1091—1137 (1941)]. Soit N_0 le noyau de ${}^t\tilde{\pi}$ et $N_1 \subset N_0$ l'idéal formé par les classes d'éléments $\alpha' \in L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ tels que $\delta \cdot \alpha' = 0$ et $\alpha' \in \delta \cdot B_1$. Alors si \mathfrak{b} est réductive dans \mathfrak{a} , il existe une application linéaire Q de degré 1 du sous-espace Q des éléments primitifs de $H(\mathfrak{b})$ dans N_0/N_1 telle que $Q^{-1}(0) = Q \cap {}^t\tilde{\varphi} H(\mathfrak{a})$. Soit $B_p = A^p(R_1)$; les B_p définissent sur $A(\mathfrak{a}')$ une structure d'algèbre différentielle filtrée à laquelle correspond une suite (E_r) d'algèbres graduées [cf. H. Cartan, C. r. Acad. Sci., Paris 226, 148—150 (1948)] et il existe pour tout $r > 0$ un isomorphisme φ_r de E_r^0 dans $H(\mathfrak{b})$ et on a

$$H(\mathfrak{B}) \supset \dots \supset \varphi_r \cdot E_r^0 \supset \varphi_{r+1} \cdot E_{r+1}^0 \supset \dots \supset {}^t\tilde{\varphi} \cdot H(\mathfrak{a}).$$

Si \mathfrak{b} est réductive dans \mathfrak{a} et s'il existe des éléments primitifs de $H(\mathfrak{b})$ de degré p n'appartenant pas à l'image de $H(\mathfrak{a})$, alors l'opérateur bord de E_{p+1} n'est pas nul et applique E_{p+1}^0 sur un sous-espace de E_{p+1}^{p+1} différent de 0. Si de plus \mathfrak{a} est réductive et s'il existe l éléments primitifs de degré p dans $H(\mathfrak{b})$ linéairement indépendants mod. ${}^t\tilde{\varphi} \cdot H(\mathfrak{a})$, alors toute base minimale de générateurs homogènes de $H(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ contient au moins l éléments de degré $p+1$ choisis dans le noyau de ${}^t\tilde{\pi}$. Il existe donc des générateurs de degré pair dans $H(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. L'A. indique des applications au cas où \mathfrak{a} est l'algèbre d'un groupe de Lie compact G et \mathfrak{b} la sous-algèbre définie par un sous-groupe fermé de G homologue à zéro. Jean Bracconier.

Dieudonné, Jean: Les semi-dérivations dans les extensions radicielles. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1319—1320 (1948).

K sei ein Körper von Primzahlcharakteristik p . Für jeden Endomorphismus u der additiven Gruppe von K mit $u(1) = 0$ bilden die Elemente $x \in K$ mit $u(xy) = xu(y) + yu(x)$ (für alle $y \in K$) einen Unterkörper S_u , und dieser enthält den Körper N_u der $x \in K$ mit $u(xy) = xu(y)$ (für alle $y \in K$). $u = D$ heißt „Halbableitung der Höhe r “ von K , wenn $K^{p^r} \subset S_D$, und außerdem „speziell“, wenn sogar $K^{p^r} \subset N_D$. Ist $K[L]$ eine endliche, rein-inseparable Erweiterung vom Exponenten $r+1$ (d. h. $K^{p^{r+1}} \subset L$), aber nicht $K^{p^r} \subset L$, und M ein Unterkörper mit $L(K^{p^r}) \subset M \subset K$, $M^p \subset L$, so wird in Verallgemeinerung der Theorie von N. Jacobson [Trans. Amer. math. Soc. 42, 206—224 (1937); dies. Zbl. 17, 292], die lediglich den Fall $r=0$ behandelt, die Menge $\Delta(L, M)$ der Halbableitungen der Höhe r von K mit $L \subset N_D$, $M \subset S_D$ und $D(M) \subset M$ betrachtet. Da mit D auch D^p und cD (für $c \in M$) und mit D_1, D_2 auch $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$ zu $\Delta(L, M)$ gehören, ist $\Delta(L, M)$ ein Liescher p -Ring über M . Er enthält als Ideal $\Sigma(L, M)$ die Menge der Endomorphismen u des Vektorraumes K über M mit $u(x) = 0$ für alle $x \in M$. Der Liesche Restklassenring $\Delta(L, M)/\Sigma(L, M)$ ist isomorph zum Lieschen Ring der Ableitungen D von M mit $D(x) = 0$ für alle $x \in L$. Im Endomorphismenring der additiven Gruppe von K erzeugen $\Delta(L, M)$ und der identische Automorphismus den Ring aller Endomorphismen des Vektorraumes K über L . G. Pickert.

Krasner, Marc: Certaines propriétés des séries de Taylor d'un ensemble au plus dénombrable de variables dans les corps valués complets et une démonstration structurale des formules de M. Pollaczek. I. Bull. Sci. math., II. S. 71, 123—152 (1947).

Verf. betrachtet solche Körper K , die in bezug auf eine nichtarchimedische Bewertung $|\dots|$ perfekt sind. Aus der schärferen Dreiecksungleichung $|\alpha + \beta| \leq \max(|\alpha|, |\beta|)$ folgt, daß eine unendliche Reihe $\sum \alpha_n$ in K genau dann konvergiert, wenn $|\alpha_n| > 0$, woraus sich ergibt, daß Umordnung und Zusammenfassung von Gliedern der Reihe erlaubt sind. Substitution und Produkt von Reihen werden untersucht und die Reihe $\sum A_n$ wird als Majorante der Reihe $\sum \alpha_n$ definiert,

wenn für jedes n $|\alpha_n| \leq |A_n|$ gilt. x_0 heißt ein holomorpher Punkt einer Taylorschen Reihe, wenn diese in jedem Punkt eines zulässigen Parallelotops $|x - x_0| \leq l$ mit dem Mittelpunkt x_0 konvergiert. Es wird Kontinuität und Differenzierbarkeit Taylorscher Reihen behandelt und die Unizität bewiesen. Fortan wird angenommen, daß K ein algebraisch-abgeschlossener Körper mit der Charakteristik 0 ist und daß sein Restklassenkörper \bar{K} eine Charakteristik $p \neq 0$ hat. Die Reihen $\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ und $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ konvergieren dann und nur dann, wenn $|x| < 1$ bzw. $|x| < \lambda$, wo λ als $|p^{1/(p-1)}|$ definiert ist. Ist z transzendent in bezug auf K , so ist die Bewertung $|\alpha^*|$ des Polynoms $\alpha^* = \sum \alpha_i z^i$ ($\alpha_i \in K$) als $\max_i |\alpha_i| \lambda^i$ definiert. Nun konvergiert eine unendliche Reihe $\alpha^* = \sum \alpha_i z^i$ ($\alpha_i \in K$) im perfekten Erweiterungskörper K^* von K genau dann, wenn $|\alpha_i| \lambda^i \rightarrow 0$. Die Reihe

$$L_j(\gamma^*) = L_j(\alpha) = \left[-\frac{\partial^j \log \left[1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i (e^v - 1)^i \right]}{\partial v^j} \right]_{v=0} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

mit $\gamma^* = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i z^i$ heißt die j -te Kummersche Derivierte; es wird bewiesen, daß ihr Holomorphiegebiet das offene Parallelotop $|\alpha_i| < \lambda^{-i}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) enthält. Der logarithmische Grenzwert $L_j(\gamma^*)$ von Pollaczek ist durch $L_j(\gamma^*) = \lim_{s \rightarrow +\infty} L_{j,s}(\gamma^*)$ definiert. Verf. beweist, daß $L_j(\gamma^*)$ die Summe einer (mindestens einen holomorphen Punkt besitzenden) Taylorschen Reihe ist, die für $|\alpha_i| < d^{-i}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) konvergiert, sobald $d > \lambda$ ist. $L_j(\gamma^*)$ hängt nur von der Restklasse $\bar{j} \pmod{p-1}$ ab, der j angehört.

L. Fuchs (Budapest).

Krasner, Marc: Certaines propriétés des séries de Taylor d'un ensemble au plus dénombrable de variables dans les corps valués complets et une démonstration structurale des formules de M. Pollaczek. II. Bull. Sci. math., II. S. 71, 180—200 (1947).

Verf. betrachtet in diesem zweiten Teil seiner Abhandlung die wichtigeren Eigenschaften des logarithmischen Grenzwertes und die Formeln von Pollaczek. Ist ξ eine primitive p -te Einheitswurzel von K , so definiert man

$$\log_m \gamma^* = \log \left(1 + \sum_{i=0}^{+\infty} (\xi^m - 1)^i \alpha_i \right) \quad (m = 0, 1, \dots, p-1)$$

mit $\gamma^* = 1 + \sum \alpha_i z^i$. Verf. beweist, daß für jedes $j = 0, 1, \dots, p-2$ und jedes $d > \lambda$, sobald $|\alpha_i| < d^{-i}$ ($i = 0, 1, \dots$) ist, $L_j(\gamma^*)$ existiert und gleich $\sum_{m=0}^{p-1} \Theta_{j,m} \log_m \gamma^*$ ($\Theta_{j,m} \in K$) ist. Die Formeln von Pollaczek:

$$L_0(\gamma^*) = \sum_{m=0}^{p-1} (\log_0 \gamma^* - \log_m \gamma^*) \quad \text{und} \quad L_j(\gamma^*) = \frac{(-1)^j}{p} \left(\sum_{m=1}^{p-1} \varepsilon_m^j \xi_m \right) \cdot \sum_{m=1}^{p-1} \varepsilon_m^j \log_m \gamma^*$$

für $j = 1, \dots, p-2$ werden bewiesen, wo ε_m eine $(p-1)$ -te Einheitswurzel von K ist.

L. Fuchs (Budapest).

Zahlkörper:

Davenport, Henri: Sur les corps cubiques à discriminants négatifs. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 883—885 (1949).

Für einen algebraischen Zahlkörper K von endlichem Grade besagt die Existenz des Euklidischen Algorithmus (= E.A.), daß es zu jedem $\lambda \in K$ ein ganzes $\xi \in K$ mit $N(\xi - \lambda) < 1$ gibt (N = Norm in K). Mit einer Ausdehnung der Methode des Verf., mit der er in einer (im Druck liegenden) Arbeit (Proc. London math. Soc.) alle quadratischen K mit E.A. angibt, kann er beweisen, daß es nur endlich viele nicht totalreelle kubische K mit E.A. gibt. Er betrachtet die Form $\xi = \alpha u + \beta b + \gamma w$

und ihre Konjugierten ξ', ξ'' (wobei α, β, γ eine Basis der ganzen Zahlen des reell angenommenen K bilden) sowie die (durch i dividierten) adjungierten Formen $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$, und die quadratische Form $R^2 \mathcal{E}^2 + (4/R) |\mathcal{E}'|^2$ ($R > 0$), die die (von R unabhängige) Determinante $-4/d$ hat, wobei $-d$ die Diskriminante von K bezeichnet. Mit einem Reduktionsverfahren schließt er auf ein $c (> 0)$ und $\lambda (\in K)$ mit $|N(\xi - \lambda)| > c \sqrt{-d}$, woraus folgt, daß für $-d > c^{-2}$ kein E.A. existiert. Ausführlicher Beweis erfolgt in den Acta math., Uppsala. Rédei (Szeged).

Litver, E. L.: Über die Idealklassenzahl einiger spezieller Körper. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 335—338 (1949) [Russisch].

Über einem algebraischen Grundkörper mit der Idealklassenzahl 1 werden n Wurzelkörper von gleichem Primzahlgrad p und der aus ihnen zusammengesetzte Körper betrachtet. Es zeigt sich dann, daß die Idealklassenzahl des letzten Körpers das Produkt der Idealklassenzahlen der Wurzelkörper mal einer Potenz von p ist, in Verallgemeinerung eines bekannten Satzes über den speziellen Dirichletschen biquadratischen Körper. Brandt (Halle).

Hasse, Helmut: Invariante Kennzeichnung relativ-abelscher Zahlkörper mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers. Abh. Deutsch. Akad. Wiss., Berlin, math.-naturw. Kl. 1947, Nr. 8, 56 S. (1949).

Es werden Bedingungen untersucht für die Konstruktion Abelscher Relativkörper mit gewissen Eigenschaften. 1. K/Ω sei eine abelsche Körpererweiterung n -ten Grades. Die Charakteristik gehe nicht in n auf, und Ω enthalte die n -ten Einheitswurzeln. Die Automorphismengruppe \mathfrak{A} bewirkt eine Darstellung im Raum K/Ω , die als Folge eines Satzes von Deuring alle n Charaktere aufweist, also reduziert so lautet: $\omega_x^A = \chi(A) \omega_x$. Hieraus folgt, daß die Körperbasis ω_x eine monomiale Multiplikationstafel $\omega_x \omega_y = c_{x,y} \omega_{xy}$ hat. Die Assoziativ- und Kommutativgesetze von K/Ω ergeben die bekannten Relationen $c_{\varphi, \chi} \psi c_{\chi, \psi} = c_{\varphi \chi, \psi} c_{\varphi, \chi}$ und $c_{\psi, \chi} = c_{\chi, \psi}$. Es sei $\omega_1 = 1$, n_x die Ordnung von χ und $c_x = \omega_x^{n_x}$, ausdrückbar als Produkt gewisser $c_{\varphi, \psi}$. Verf. beweist, daß die Nullteilerfreiheit von K/Ω gleichbedeutend ist mit der Irreduzibilität der Polynome $t^{n_x} - c_x$ in Ω . Die Basis ω_x ist bis auf Transformationen $\omega'_x = a_x \omega_x$ eindeutig bestimmt, dabei wird $c'_{x,y} = c_{x,y} \cdot a_x a_y a_{xy}^{-1}$. Mit Rücksicht auf diese Transformationsmöglichkeit redet man von der Faktorensystemklasse $c_{x,y}$. — Damit ist alles gesagt, was man beachten muß, wenn man umgekehrt zu vorgegebener abelscher Gruppe \mathfrak{A} bzw. deren Charaktergruppe χ einen Körper K/Ω konstruieren will. 2. Es seien K/Ω_0 , K/Ω galoissch mit den Gruppen \mathfrak{G} und dem abelschen Normalteiler \mathfrak{A} . Dem Element S aus \mathfrak{G} entspreche s der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A} = g$. \mathfrak{G} bewirkt eine monomiale Darstellung $\omega_x^S = b_{x,s} \omega_{xs}$, welche $\omega_x^A = \chi(A) \omega_x$ fortsetzt. Dabei hat man folgende Darstellungsbedingungen: $(D_b) \ b_{x,s} \tau = b_{x,s} b_{xs}^s, \quad (D_\chi) \ \chi_{st} = \chi_s \chi_t;$

Automorphismenbedingungen: $(A_c) \ b_{x,s} b_{\psi, s} b_{\chi\psi, s}^{-1} = c_{x,\psi}^s c_{xs,\psi s}^1, \quad (A_\chi) \ (\chi \psi)_s = \chi_s \psi_s;$
Transformationsformeln $(T): \omega'_x = a_x \omega_x, c'_{x,y} = c_{x,y} \cdot a_x a_y a_{xy}^{-1}, b'_{x,s} = b_{x,s} \cdot a_x^s a_{xs}^{-1}.$

[Wegen $b_{x,sA} = b_{x,s} \cdot \chi(A)$ braucht man die $b_{x,s}$ nur für ein Vertretersystem $S_s \bmod \mathfrak{A}$ anzugeben. Entsprechend der Elimination überflüssiger b erscheint beim Verf. (D_b) modifiziert]. — Aufgabe: Ist Ω/Ω_0 galoissch mit der Gruppe g , ist ferner eine Gruppe \mathfrak{G} mit $\mathfrak{G}/g \simeq \mathfrak{A}$ vorgelegt, so soll dazu ein Körper $K/\Omega/\Omega_0$ konstruiert werden. — Hierzu werde zunächst χ_s so erklärt, daß $(D_\chi), (A_\chi)$ erfüllt sind. Verf. beweist mit einer Verallgemeinerung des Satzes 90 von Hilberts Zahlbericht, daß eine Lösung von (D_b) bis auf Transformationen (T) eindeutig ist, wenn überhaupt eine Lösung existiert. Es sei nun $b_{x,s}$ eine Lösung von (D_b) . Ein ähnliches Schlußverfahren zeigt dann, daß (A_c) immer Lösungen $c_{x,y}$ besitzt. Es bleibt unerledigt die Aufgabe, unter den Klassen $c_{x,y}$, wenn möglich, diejenigen auszusondern, die zu assoziativen, kommutativen, nullteilerfreien hyperkomplexen Systemen mit der

Multiplikationstafel $\omega_x \omega_y = c_{x,y} \omega_{xy}$ führen. 3. Jetzt seien $K/\Omega/\Omega_0$ Zahlkörper. Als Klassenkörper gehört K zu einer Idealklassengruppe D/H in Ω . Für das Artin-symbol ist nun bekanntlich $\left(\frac{K/\Omega}{a}\right)^s = \left(\frac{K/\Omega}{a^s}\right)$, daher besteht ein g-Isomorphismus $D/H \simeq \mathfrak{A}$. Weiterhin sei auch g abelsch und α_0 ein Ideal aus Ω_0 . Nach Artin liegt dann

$$\left(\frac{K/\Omega}{\alpha_0}\right) \text{ in der Verlagerung } V_{\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{A}(s)}, \text{ wo } s = \left(\frac{\Omega/\Omega_0}{\alpha_0}\right).$$

Wegen der erwähnten Isomorphie ist dies eine Vorschrift, wie α_0 in D/H zu liegen hat. Leider reicht die g-Isomorphie und diese Vorschrift nicht immer aus, um D/H durch Ω/Ω_0 und \mathfrak{G} festzulegen. Aber diese Festlegung gelingt dem Verf. bei spezieller Struktur von \mathfrak{G} , z. B. dann, wenn g zyklisch ist. — Nimmt man überall \mathfrak{G} als verschränktes Produkt und schreibt entsprechend alle Formeln um, so erhält man im wesentlichen die Darstellung des Verf. Insbesondere wird der Fall eines abelschen g des Näheren beschrieben.

Ernst Witt (Hamburg).

Deuring, Max: Algebraische Begründung der komplexen Multiplikation. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 16, 32—47 (1949).

In der Arbeit des Ref. „Neue Begründung der komplexen Multiplikation, I, II“ [J. reine angew. Math. 157, 115—139 (1927); 165, 64—88 (1931); dies. Zbl. 2, 120] wurden zwei Standpunkte unterschieden, nämlich Theorie I: Einordnung in die allgemeine Klassenkörpertheorie; Theorie II: Aufbau ohne Benutzung der allgemeinen Klassenkörpertheorie. Nachdem inzwischen durch eine Reihe von Arbeiten des Ref. und des Verf. (H. Hasse, dies. Zbl. 13, 197; 14, 149, 249; M. Deuring, dies. Zbl. 16, 346; 24, 13, 101; 25, 20; 26, 200) die arithmetische Theorie der elliptischen Funktionenkörper und der zugehörigen Modulfunktionenkörper rein-algebraisch aufgebaut ist, kann Verf. nunmehr auch die funktionentheoretische Begründung der Theorie der Klassenkörper der komplexen Multiplikation durch eine rein-algebraische Begründung ersetzen. — In der vorliegenden Arbeit führt er dies für die Theorie I durch. Dabei handelt es sich darum, rein-algebraische Definitionen für die absoluten Klasseninvarianten $j(\mathfrak{f})$ und die Strahlklasseninvarianten $\tau(\mathfrak{f}_g^*)$ eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers Σ zu geben und darauf gestützt das Zerlegungsgesetz für die Primdivisoren ersten Grades von Σ in den durch sie erzeugten Körpern $\Omega = \Sigma(j(\mathfrak{f}))$ und $\Omega_g = \Sigma(j(\mathfrak{f}), \tau(\mathfrak{f}_g^*))$ zu beweisen. Letzteres geschieht im wesentlichen nach dem formal-algebraischen Schema aus der eingangs zitierten funktionentheoretischen Begründung des Verf., nur daß im Falle der Strahlklassenkörper Ω_g statt der Erzeugung durch die $\tau(\mathfrak{f}_g)$ eine abstrakte Charakterisierung zugrunde gelegt wird. Für die Definition der $j(\mathfrak{f})$ kann Verf. auf eine der genannten früheren Arbeiten zurückgreifen, in der diese Definition durch Erweiterung des Meromorphismenbegriffs auf Divisoren statt nur Zahlen aus Σ gegeben wurde. Diese Begriffserweiterung ist überhaupt der wesentlich neue Gedanke, der für die behandelte Aufgabe zu den schon vorhandenen Begriffsbildungen der arithmetischen Theorie der elliptischen Funktionenkörper hinzuzunehmen ist. — Der Hauptsatz des Verf. bekommt bei jener abstrakten Charakterisierung die folgende Gestalt: Für jeden ganzen Divisor g von Σ ist der Strahlklassenkörper mod. g von Σ gleich dem Restklassenkörper Ω_g des elliptischen Funktionenkörpers K_0 nach irgendeinem echten g -ten Teilwert \mathfrak{p} von \mathfrak{o} . Dabei ist zunächst K ein elliptischer Funktionenkörper über $\Omega = \Sigma(j)$ mit der Invariante j , dessen Meromorphismenring \mathbf{R} die Hauptordnung von Σ ist, und dann K_0 der Invariantenkörper von K bei der Einheitengruppe von \mathbf{R} (letzteres entsprechend dem Übergang von der Weierstraßschen \wp -Funktion zur Weberschen τ -Funktion). Ferner ist \mathfrak{o} ein zur Normierung dienender Primdivisor ersten Grades von K und dann der Teilwert \mathfrak{p} durch $g\mathfrak{p} = \mathfrak{o}$ (und $g'\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ für echte Teiler g' von g) erklärt. — Es wäre zu wünschen, daß Verf. für diese seine rein-algebraische Begrün-

dung der Theorie I und die in Aussicht gestellte ergänzende Theorie II bei Gelegenheit eine in sich geschlossene Darstellung gibt, bei der die Vorbereitungen aus den früheren Arbeiten einbezogen werden und der systematische Aufbau nicht, wie hier, durch mehrfaches Einschalten von Gedankengängen aus der klassischen, analytischen Theorie unterbrochen wird.

Hasse (Berlin).

Mordell, L. J.: Rational points on cubic surfaces. Publ. Math., Debrecen 1, 1—6 (1949).

Verf. gibt einen kurzen Bericht über die Entwicklung der Theorie von den rationalen Punkten auf einer kubischen Fläche $f(x, y, z) = 0$, wo f ein irreduzibles Polynom mit rationalen Koeffizienten ist. Es werden Resultate von Euler, Lagrange, Libri, Ryley, Richmond, Mordell, Segre und Whitehead erwähnt. Nach dem Hauptresultat von Segre gibt es unendlich viele rationale Punkte auf der Fläche, wenn es einen gibt.

Nagell (Uppsala).

Zahlentheorie:

Guttman, Solomon: New magic in old magic squares. Scripta math., New York 14, 284—286 (1948).

Einfache zahlentheoretische Bemerkungen über magische Quadrate der Ordnung $(3n)^2$, die aus dem der Ordnung 3^2 abgeleitet sind.

Sprague (Berlin).

Guttman, Solomon: Universal magic squares and multigrade equations. Scripta math., New York 13, 187—202 (1947).

Verf. beschäftigt sich mit quadratischen Anordnungen der natürlichen Zahlen nach ihrer Größe und mit solchen Schablonen dazu, die bei beliebigen Translationen Lösungen multigrader Gleichungen liefern, wenn den sichtbaren Feldern geeignete positive und negative Multiplizitäten zugeordnet werden.

Sprague (Berlin).

Gloden, A.: Résolution d'un système diophantien. Euclides, Madrid 9, 218—219 (1949).

Gloden, A.: The congruence $x^8 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Scripta math., New York 15, 97—98 (1949).

Aude, Hermann T. R.: The pattern for the distribution of the numbers c when the diophantine equation $ax + by = c$ has exactly n solutions. Bull. Ecole Polytechn. Jassy 2, 10—18 (1947).

Trivialitäten für die Anzahl der positiven ganzen Lösungen von $ax + by = c$.

Rédei (Szeged).

Bell, E. T.: A diophantine equation. Amer. math. Monthly 56, 1—4 (1949).

Es wird die Diophantische Gleichung $x^2 - y^2 - z^3 - w^3$ in ganzen Zahlen vollständig gelöst. Sämtliche Lösungen werden durch zwei Scharen von expliziten Formeln erschöpft, die beide je 9 unabhängige Parameter enthalten und in ihnen homogen von 9-tem und 6-tem Grade sind. Von einer Eindeutigkeit ist dabei keine Rede, auch sind die Formeln verhältnismäßig sehr kompliziert, das alles scheint in der Natur der Sache zu liegen. Die Betrachtungen sind durchweg elementar, sie bestehen aus einer in mehreren Schritten durchgeführten Reduktion auf die leichten Diophantischen Gleichungen $RS = TV$, $R^2 + 3S^2 = TV$, $X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 = 0$.

Rédei (Szeged).

Mordell, L. J.: On some diophantine equations $y^2 = x^3 + k$ with no rational solutions. Arch. Math. Naturv., Oslo 49, Nr. 6, 143—150 (1947).

Es sei k eine quadratfreie natürliche Zahl $\equiv 6$ oder $\equiv 15 \pmod{36}$ mit den folgenden Eigenschaften: 1. Die Klassenzahl im Körper $K(\sqrt{k})$ ist nicht durch 3 teilbar; 2. Wenn X_1 und Y_1 die Fundamentallösung der Pellschen Gleichung $X^2 - k Y^2 = 1$ bedeutet, so ist $Y_1 \not\equiv 0$ und $\not\equiv \pm 1 \pmod{9}$; 3. Die Klassenzahl h im Körper $K(\sqrt{-3k})$ ist nicht durch 3 teilbar; 4. Es seien p und q natürliche Zahlen,

so daß $p^2 + \frac{1}{3}kq^2 = 3^{2h}$; dann ist für $h \equiv 1 \pmod{3}$ $q \not\equiv \pm 1 \pmod{9}$ und für $h \equiv -1 \pmod{3}$ $q \not\equiv \pm 2(k/3)^2 \pmod{9}$. — Mittels einer descente infinie beweist dann Verf., daß die diophantische Gleichung $y^2 = x^3 + k$ keine Lösungen in rationalen Zahlen y und x besitzt. Beispiele geben $k = 6, 42, 51$. Nagell.

Schwarz, Štefan: On the reducibility of binomial congruences and on the bound of the least integer belonging to a given exponent mod p . Časopis Mat. Fysiky, Praha 74, 1—15 und tschechische Zusammenfassg. -16 (1949).

Verf. gewinnt den Satz: Ist $[P]$ ein endlicher Körper mit P Elementen und der Charakteristik p , so hat das Binom $x^n - a$ ($a \neq 0, \in K; p \nmid n$) genau

$$(1) \quad \sigma_k = \frac{1}{k} \sum_{t|k} \mu\left(\frac{k}{t}\right) D_t \quad (D_t = (n, P^t - 1))$$

irreduzible Faktoren k -ten Grades in $[P]$, wobei man nur über die t mit $a^{P^t} = 1$ [$D_t = (P^t - 1)/D_t$] zu summieren hat. Den Beweis teilt er nur für den Fall $P = p$ mit, aber der allgemeine Satz läßt sich ebenso leicht beweisen. Als leichte Anwendungen betrachtet er die im wesentlichen bekannten wichtigen Spezialfälle (stets mit $P = p$): $n = p - 1$, $n = q$ (Primzahl), $a = 1$, $x^n - a = F_n(n)$ das n -te Kreisteilungspolynom. Ferner drückt der Verf. (1) auch mit Hilfe von Charakteren aus und gewinnt so (wieder aus dem Fall $P = p$) folgenden Satz: Für die kleinste positive ganze Zahl $g(p, l)$, die mod p zum Exponenten l gehört, gilt $g(p, l) = O(l^{\varepsilon-1} p^{3/2})$ ($\varepsilon > 0$). Hiervon ist Fall $l = p - 1$ der Satz von Vinogradov über die primitiven Kongruenzwurzeln mod p . Interessant ist nur der Fall, daß l von größerer Ordnung ist als ein $p^{1+\varepsilon}$. Als eine Anwendung des allgemeinen Falles wird noch ein Satz von Davenport (dies. Zbl. 18, 109) über erzeugende Elemente der Multiplikativen Gruppe von $[P]$ verallgemeinert. Alles kommt elementar und überraschend leicht heraus. Ref. wird für (1) einen noch kürzeren Beweis mitteilen. Rédei.

Gupta, Hansraj: On a conjecture of Miller. J. Indian math. Soc., n. S. 13, 85—90 (1949).

Es sei $\mu(m)$ die Möbiussche Funktion und

$$M_1(n) = \sum_{m=1}^n \mu(m), \quad M_2(n) = \sum_{m=1}^n M_1(m), \quad A(n) = \frac{M_2(n)}{n}.$$

J. C. P. Miller fand durch Rechnung $A(n) \leq 0$ für $3 \leq n \leq 1000$ und warf die Frage auf, ob $A(n)$ überhaupt positiver Werte fähig sei. In der vorliegenden Arbeit wird ausgerechnet, daß jedenfalls für $n \leq 20000$ $A(n)$ negativ ist. Ferner ist $|M_2(n)| = O(n \log n)$. R. Kochendörffer (Greifswald).

Atkinson, F. V. and Lord Cherwell: The mean-values of arithmetical functions. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 20, 65—79 (1939).

Es wird zunächst folgender Satz bewiesen: Es seien $\{a_n\}$, $\{A_n\}$ zwei Folgen, verknüpft durch

$$A_n = \sum_{m|n} a_m, \quad a_n = \sum_{m|n} \mu(m) A_m,$$

dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \sum_{n=1}^N A_n \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n n^{-1} \quad (N \rightarrow \infty),$$

wenn es eine positive nichtabnehmende Funktion $\lambda(n)$ gibt, so daß $\lambda(n)/\log n$ nicht zunehmend ist und

$$\sum_{n=1}^N a_n = o\{N/\lambda(N)\}, \quad \log\left(N^{-1} \sum_{n=1}^N |a_n|\right) = O(\lambda(N))$$

gilt. Dieser Satz wird auf Mittelwerte über arithmetische Reihen ausgedehnt, und interessante Spezialfälle werden betrachtet. Dann wird der Satz verallgemeinert auf Mittelwerte über Polynomfolgen. Für die Formulierung sei auf die Arbeit selbst verwiesen. Hlawka (Wien).

Rényi, Alfred: Un nouveau théorème concernant les fonctions indépendantes et ses applications à la théorie des nombres. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 28, 137—149 (1949).

Verf. zeigt folgenden Satz: Es sei $\{f_n(t)\}$ eine Folge von reellen Funktionen auf $(0, 1]$, welche zu je zweien im Sinne von Kac und Steinhaus unabhängig sind (vgl. dies. Zbl. 15, 218). Es sei $V_n(X)$ die Verteilungsfunktion von $f_n(t)$, ebenso $V_n^E(X)$ die Verteilungsfunktion auf E , definiert durch $(\text{Maß}[f_n(t) \leq X, t \in E]) / |E|$ ($|E|$ Maß von E) und $V_n(I) = V_n(b) - V_n(a)$, wenn I das Intervall $(a, b]$ ist. Analog ist $V_n^E(I)$ definiert. Dann ist

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(V_n^E(I) - V_n(I))^2}{V_n(I)} \leq \frac{1}{|E|}.$$

Dabei ist das Integral im Sinne von Burkill zu verstehen [Saks, Theory of the integral, vgl. dies. Zbl. 17, 300]. Für die zahlentheoretischen Anwendungen ist es notwendig, die Voraussetzung der Unabhängigkeit abzuschwächen. Die Folge $\{f_n(t)\}$ heißt fastunabhängig, wenn die Ungleichungen

$$\left| \frac{S_{n,m}}{S_n S_m} - 1 \right| \leq \delta_n \delta_m$$

gelten für alle Paare (n, m) , (a, b) , (c, d) , für die $S_n S_m \neq 0$. Dabei ist $\delta^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 < 1$

und $S_{n,m} = \text{Maß}[a < f_n(t) \leq b, c < f_m(t) \leq d]$, $S_n = \text{Maß}[a < f_n(t) \leq b]$. Dann ist in $(*)$ die Schranke rechts noch mit $(1 - \delta^2)^{-1}$ zu multiplizieren. Verf. gibt als Anwendung in Verallgemeinerung des großen Siebes von Linnik folgenden zahlentheoretischen Satz: Sind $f(p)$ und $Q(p)$ zwei zahlentheoretische Funktionen mit $0 < f(p) \leq p$, $1 < Q(p)$, ist weiter $\min f(p)/p = \tau$, $\max Q(p) = Q$ über alle $p < \frac{1}{2} N^{\frac{1}{2}}$, $Z(p, k)$ die Anzahl der ganzen Zahlen aus einer beliebigen monoton wachsenden Folge $\{n_j\}$ ($j = 1, \dots, Z$; $n_j \leq N$), welche $\equiv k(p)$, dann gilt für jede Primzahl $p < \frac{1}{2} N^{\frac{1}{2}}$, ausgenommen höchstens $9NQ^2/Z\tau$, und für jeden Rest k , ausgenommen höchstens $f(p) - 1$, die Ungleichung

$$\left| Z(p, k) - \frac{Z}{p} \right| < \frac{Z}{p Q(p)}. \quad \text{Hlawka (Wien).}$$

Mirsky, L.: Generalizations of a problem of Pillai. Proc. R. Soc. Edinburgh, A 62, 460—469 (1948).

Verf. verallgemeinert seine Untersuchungen über das Problem von Pillai (dies. Zbl. 29, 109). Es sei A eine Menge von ganzen Zahlen a . Eine Zahl, welche durch kein a teilbar ist, heiße A -frei. Es gebe weiter ein ϑ ($0 < \vartheta < 1$), so daß für $x \rightarrow \infty$ $A(x) = \sum_{a \leq x} 1 = O(x^\vartheta)$, und es seien je zwei Elemente von A relativ prim. Jede Zahl $a_1^{t_1} \cdots a_n^{t_n}$ heiße c -Zahl. Sind dann C_1, \dots, C_s s gegebene Mengen von c -Zahlen, $\gamma(n)$ die größte c -Zahl, welche n teilt, dann sei M die Menge aller c -Zahlen u , für welche bei vorgegebenen natürlichen Zahlen k_1, \dots, k_s , $\gamma(u + k_i)$ in C_i ($i = 1, \dots, s$) liegt. Dann wird für die Anzahl $M(x)$ der $n \leq x$ aus M gezeigt

$$M(x) = \sigma x + O(x^{2\vartheta/(1+\vartheta+\epsilon)}) \quad (\epsilon > 0),$$

wo σ nur von M abhängt und explizit angegeben wird. Die Menge M ist entweder leer oder $\lim_{x \rightarrow \infty} M(x)/x = \sigma$ ist positiv. — Die weiteren Untersuchungen beschränken sich auf den Spezialfall, daß alle C_i nur die Zahl 1 enthalten. Verschiedene Verallgemeinerungen und Verschärfungen der Voraussetzungen und Sätze werden noch untersucht.

Hlawka (Wien).

Mirsky, L.: The number of representations of an integer as the sum of a prime and a k -free integer. Amer. math. Monthly 56, 17—19 (1949).

Verf. beweist folgenden Satz: Es sei k ganz ≥ 1 , H beliebig > 0 . Dann kann jede genügend große Zahl n dargestellt werden als Summe einer Primzahl und einer

k -freien Zahl (d. h. durch eine, welche durch keine k -te Potenz einer Primzahl teilbar ist) und die Anzahl $T(n)$ dieser Darstellungen ist

$$\prod_{p \nmid n} \left(1 - \frac{1}{p^{k-1}(p-1)}\right) \text{Li } n + O\left(\frac{n}{\log^k n}\right).$$

Für die Anzahl $U(n)$ der k -freien Zahlen $m \leq n$, für welche die Darstellung $m = p + l$ (l ganz $\neq 0$) gilt, besteht dieselbe Formel, nur ist das obige Produkt jetzt über alle Primzahlen $p \nmid l$ zu erstrecken. *Hlawka* (Wien).

Nečaev, V. I.: Die Darstellung ganzer Zahlen als Summe von Summanden der Form $\frac{x(x+1) \cdots (x+n-1)}{n!}$. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 159—162 (1949) [Russisch].

Es sei $f_n(x) = \frac{x(x+1) \cdots (x+n-1)}{n!}$. Es bedeute $G(n)$ die kleinste ganze Zahl r mit der Eigenschaft, daß alle genügend großen ganzen Zahlen in der Form $f_n(x_1) + f_n(x_2) + \cdots + f_n(x_r)$ (1) mit nichtnegativen ganzen x_i ($i = 1, 2, \dots, r$) darstellbar sind. Es bedeute ferner $g(n)$ die kleinste ganze Zahl r mit der Eigenschaft, daß alle positiven ganzen Zahlen in der Form (1) darstellbar sind. Es sei $A(n) = 5, 8, 17, 31, 45, 63, 81, 103, 125, 155$ für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$, ferner sei $A(n) = 4n \log n + 2n \log \log n + 11n/2$ für $n \geq 12$. Es sei $B(n) = 5 \log 2 + 8n$ für $n = 4, 5, \dots, 13$ und $B(n) = \frac{1}{2} n^2 \log n + 8n \log n$ für $n \geq 14$. Verf. beweist, daß

$$(2) \quad n \leq G(n) \leq A(n) \quad \text{für } n = 2, 3, \dots \quad \text{und daß}$$

$$(3) \quad n + [n/2] \leq g(n) \leq B(n) \quad \text{für } n = 4, 5, \dots$$

Verf. stützt sich auf die Methode von I. M. Vinogradov zur Lösung des Waring'schen Problems [Akad. Nauk SSSR, Trudy Inst. mat. Steklov Nr. 27 (1947)].

A. Rényi (Budapest).

Erdős, P.: Problems and results on the differences of consecutive primes. Publ. Math., Debrecen 1, 33—37 (1949).

Ist $\{p_n\}$ die Folge der Primzahlen, der Größe nach geordnet, und $d_n = p_{n+1} - p_n$, dann zeigt Verf. folgenden bemerkenswerten Satz. Es ist

$$\lim \min (d_n, d_{n+1}) / \log n = \infty.$$

Am Schluß der Arbeit teilt er (ohne Beweis) noch eine Verschärfung mit. *Hlawka*.

Mills, W. H.: A prime-representing function. Bull. Amer. math. Soc. 53, 604 (1947).

Verf. beweist, daß es eine reelle Zahl A (> 1) gibt mit der Eigenschaft, daß $[A^{3^n}]$ für jedes $n = 1, 2, \dots$ einer Primzahl gleich ist. Da der Beweis sehr einfach ist, und da es in der Arbeit einige störende Druckfehler gibt (statt 3^{-n} ist konsequent 3^{-n} geschrieben), geben wir den Beweis wieder: Es sei q eine reelle Zahl mit der Eigenschaft, daß es für $N \geq N_0$ zwischen N^q und $(N+1)^q - 1$ immer mindestens eine Primzahl gibt. Es sei P_0 eine Primzahl $\geq N_0$; von P_0 ausgehend konstruieren wir eine Folge von Primzahlen $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$, die den Ungleichungen $P_n^q < P_{n+1} < (P_n + 1)^q - 1$ genügen ($n = 0, 1, \dots$). Setzen wir $u_n = P_n^{q-n}$ und $v_n = (P_n + 1)^{q-n}$ so ist $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$, und $v_n/u_n \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$; somit existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = A$,

und es ist für jedes $n > 0$ $u_n < A < v_n$, d. h. $P_n < A^{q^n} < P_n + 1$ und damit $[A^{q^n}] = P_n$ eine Primzahl. Da nach einem Satze von A. E. Ingham [Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 8, 255—266 (1937); dies. Zbl. 17, 389] $q = 3$ gewählt werden kann, ist alles bewiesen. (Bemerkung des Ref.: Zwischen N^3 und $(N+1)^3 - 1$ gibt es für $N \geq N_0$ mindestens zwei Primzahlen, und so hat man bei der Wahl von P_{n+1} mindestens zwei Möglichkeiten für $n = 1, 2, \dots$; damit ist die Existenz einer Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums von reellen Zahlen A mit der obengenannten Eigenschaft bewiesen.)

A. Rényi (Budapest).

Buchstab, A. A.: Über Zahlen einer arithmetischen Progression, deren sämtliche Primteiler klein im Vergleich zur Wachstumsordnung sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 5—8 (1949) [Russisch].

Es bedeute $B_r(D, x, y)$ die Anzahl ganzer Zahlen in der arithmetischen Progression $Dn + r$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), die $\leq x$ sind und deren Primteiler alle $\leq y$ sind. Verf. beweist, daß für $a \geq 1$ und $(D, r) = 1$

$$B_r(D, x, x^{1/a}) = \frac{x F(a)}{D} + O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right)$$

gilt, wo die Funktion $F(a)$ durch die Differenzen-Differentialgleichung $F'(a) = -F(a-1)/a$ für $a > 1$ mit Anfangsbedingungen $F(a) = 1$ für $0 \leq a \leq 1$ definiert ist. Bezüglich der Größenordnung von $F(t)$ beweist Verf. die Ungleichung

$$F(a) > \exp \left[-a \left(\log a + \log \log a + 6 \frac{\log \log a}{\log a} \right) \right].$$

Mit Hilfe dieser Ergebnisse gelingt es Verf., den Satz von I. M. Vinogradov [Izvestija Akad. Nauk SSSR, VI. S. 20, 585—600 (1926)] bezüglich des kleinsten Nichtrestes von der Ordnung m mod p zu verschärfen. Es bedeute $N_m(p)$ die kleinste Zahl n , $0 < n < p$, für welche $x^m \equiv n \pmod{p}$ nicht lösbar ist (p Primzahl), und es sei $v_m(p) = \frac{\log N_m(p)}{\log p}$, wobei immer vorausgesetzt wird, daß m Teiler von $p-1$ ist. Verf. beweist, daß für genügend große p [$p \geq p_0 = p_0(m)$] für $m > 20$ $v_m(p) < \frac{1}{6}$, für $m > 203$ $v_m(p) < \frac{1}{8}$, für $m > 2825$ $v_m(p) < \frac{1}{10}$, für $m > 52631$ $v_m(p) < \frac{1}{12}$ und für $m > e^{33}$ $v_m(p) < \frac{\log \log m + 2}{2 \log m}$ gilt. A. Rényi (Budapest).

Vinogradov, I. M.: Über eine Abschätzung trigonometrischer Summen mit Primzahlen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 12, 225—248 (1948) [Russisch].

Es werden einige neue Sätze, schärfer als die bisher bekannten, bezüglich der Abschätzung von Summen $\sum_{p \leq P} \exp[2\pi i l f(p)]$, wo l eine ganze Zahl, $f(x)$ ein

Polynom oder eine durch Polynome gut approximierbare Funktion bedeutet und p die Primzahlen durchläuft, bewiesen. Ein Teil der Resultate war schon früher angekündigt [s. I. M. Vinogradov, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 51, 489—490 (1946) und 55, 465—476 (1947)]. — Satz 1. Es sei P eine positive ganze Zahl, κ eine reelle Zahl, $0 < \kappa \leq 1$, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, und einer der Koeffizienten, z. B. a_s ($2 \leq s \leq n$), sei in der Form $a_s = a/q + \theta/q\tau$ darstellbar, wo θ eine reelle Zahl $|\theta| \leq 1$, a und q ganze Zahlen bedeuten, die den Bedingungen $(a, q) = 1$, $P^\kappa \ll q \leq \tau$ genügen, und wo $\tau = P^{0,5s}$ gesetzt wurde. (Hier, wie im folgenden bedeutet $A \ll B$, daß $|A|/B \leq c$, wo c eine positive absolute Konstante ist.) Man setze

$$\varrho = \frac{0,041}{n^2 (\log n + 2)}, \text{ wenn } q > P^{\frac{1}{2}}, \text{ und } \varrho = \frac{0,37\kappa}{n^2 (\log(n^2/\kappa) + 4)}, \text{ wenn } q \leq P^{\frac{1}{2}};$$

ferner sei l eine positive ganze Zahl $l \leq P^{2\varrho}$. Unter diesen Bedingungen ist

$$\left| \sum_{p \leq P} \exp(2\pi i l f(p)) \right| \ll P^{1-\varrho}$$

wo p die Primzahlen durchläuft. Satz 2. Es seien P, P_1, P_2 ganze Zahlen, $0 < P/2 < P_1 < P_2 \leq P$, $f(x)$ sei eine reelle Funktion, die im Intervalle (P_1, P_2) $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar ist, ferner seien $f^{(n)}(x)$ und $\varphi(x) = x f^{(n)}(x) - (n-1) f^{(n-1)}(x)$ von beständigem Vorzeichen im Intervalle (P_1, P_2) ; es bedeute β eine reelle Zahl, $0 \leq \beta \leq 1$, und wir nehmen an, daß $A = P^{(n+1)/2 + \beta}$ gesetzt, die Ungleichungen

$$\frac{c_1}{A} \leq |f^{(n)}(x)| \leq \frac{c_2}{A}; \quad \frac{c_3}{A} \leq |\varphi(x)| \leq \frac{c_4}{A} \quad \text{und} \quad |f^{(n+1)}(x)| \leq \frac{c_5}{A P}$$

erfüllt sind, wo die c_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) positive Konstanten bedeuten. Man setze $\varrho = \frac{0,045}{n^2 (\log n + 2)}$, und es sei l eine positive ganze Zahl, $l \leq P^{2\varrho}$. Unter diesen Bedingungen ist

$$\left| \sum_{P_1 < p < P_2} \exp(2\pi i l f(p)) \right| \ll P^{1-\varrho},$$

wo p die Primzahlen durchläuft. — Sätze 1. und 2. werden zur Abschätzung der Gleichmäßigkeit der Verteilung der Bruchteile von $f(p)$ angewandt. *A. Rényi.*

Vinogradov, I. M.: Über die Verteilung der Produkte von Primzahlen und der Werte der Möbiusschen Funktion. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* 12, 341—350 (1948).

Es werden Abschätzungen von Summen $\sum_{k=1}^K \left| \sum_{w \leq N} \exp(2\pi i k \alpha w) \right|$ (α reell), in denen w die aus einer gegebenen Anzahl l von verschiedenen Primzahlen bestehenden ganzen Zahlen durchläuft, bewiesen. Diese Abschätzungen enthalten (für $l=1$) als speziellen Fall die bekannten Abschätzungen des Verf. über trigonometrische Summen über Primzahlen [s. I. M. Vinogradov, Die Methode der trigonometrischen Summen in der Zahlentheorie, Akad. Nauk. SSSR, Trudy Inst. mat. Steklov Nr. 23 (1947), insbes. Kap IX]. Als Anwendung werden neue Eigenschaften der Möbiusschen Funktion $\mu(n)$ bewiesen. — Im Folgenden bedeuten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ beliebige kleine positive Zahlen. Satz 1. Es bedeute N eine positive Zahl, $N \geq N_0$, l eine positive ganze Zahl, τ eine reelle Zahl, die der Ungleichung $\sqrt{N} \leq \tau \leq N \exp(-(\log N)^{\varepsilon_1})$ genügt, α eine reelle Zahl, welche in der Form $\alpha = a/q + \Theta/q\tau$ mit ganzen a und q , $(a, q) = 1$, $\exp((\log N)^{\varepsilon_1}) \leq q \leq \tau$ und $|\Theta| \leq 1$ darstellbar ist; man setze ferner $\Delta = \sqrt{1/q + q/N}$ und $\Delta_1 = \Delta^{1-\varepsilon_2} + \sqrt{1/N^{0,2-\varepsilon_2}}$; es sei endlich K eine positive ganze Zahl, $K \leq \Delta^{-2}$. Unter dieser Bedingung ist

$$\sum_{k=1}^K \left| \sum_{w \leq N} \exp(2\pi i k \alpha w) \right| \leq K N \Delta_1,$$

wo w alle positiven ganzen Zahlen $\leq N$, die aus l verschiedenen Primfaktoren bestehen, durchläuft. — Satz 2. Wenn N, τ, x, q, l , und Δ_1 dieselbe Bedeutung wie in Satz 1 haben, wenn β eine reelle Zahl, $0 < \beta \leq 1$ und (x) den Bruchteil von x bezeichnet, wenn ferner $L(\beta)$ die Anzahl positiver ganzer Zahlen $w \leq N$, die aus l verschiedenen Primfaktoren bestehen und für welche $(\alpha w) < \beta$ stattfindet, ist, so gilt $L(\beta) = \beta L(1) + O(N \Delta_1)$. Satz 3. Es sei $N \geq N_0$, q eine ganze Zahl, $\exp((\log N)^{\varepsilon_3}) \leq q \leq N \cdot \exp(-(\log N)^{\varepsilon_3})$ und es sei n' für positive ganze $n \leq N$ durch $0 \leq n' < q$, $n' \equiv n \pmod{q}$ bestimmt. Es bedeute β eine reelle Zahl, $0 < \beta \leq 1$. Wenn $M(\beta) = \sum_{\substack{n \leq N \\ n' < \beta q}} \mu(n)$ gesetzt wird, wo $\mu(n)$ die Möbiussche

Funktion bezeichnet, so ist $M(\beta) = \beta M(1) + O(N \Delta_1)$, wo Δ_1 wie im Satz 1 definiert ist.

A. Rényi (Budapest).

Erdős, P. and J. F. Koksma: On the uniform distribution modulo 1 of lacunary sequences. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 52, 264—273 (1949).

Ist $\{u_n\}$ eine Folge reeller Zahlen, ist N' die Anzahl der Zahlen $u_n - [u_n]$ ($n = 1, 2, \dots, N$) in einem Teilintervall $[\alpha, \beta]$ aus $[0, 1]$, dann ist bekanntlich die Diskrepanz $D(N) = \sup |N'/N - (\beta - \alpha)|$ über alle Teilintervalle. Für die Gleichverteilung mod 1 ist bekanntlich $ND(N) = o(N)$ notwendig und hinreichend (vgl. Koksma, Diophantische Approximationen; dies. Zbl. 12, 396). Es handelt sich nun um die Abschätzung der Diskrepanz lakunärer Folgen $u_n = f(n, \Theta)$ mit $f'_\Theta(n+1, \Theta) \geq (1+\delta) f'_\Theta(n, \Theta)$, $f''_\Theta(n+1, \Theta) \geq (1+\delta) f''_\Theta(n, \Theta) > 0$ (wo $\delta > 0$). Ein Beispiel dafür ist $u_n = \lambda_n \Theta$ [λ_n monoton wachsende Folge von ganzen Zahlen, $\lambda_{n+1} \geq (1+\delta) \lambda_n$]. Dann wird gezeigt:

$$ND(N) = o(N^{1/2} \log^{3/2} N (\log \log N)^{1/2} \omega(N))$$

für fast alle Θ . Dabei ist $\omega(n)$ eine beliebige vorgegebene positiv-wachsende Funktion mit $\omega(n) \rightarrow \infty$. — Dieser Satz ist ein Spezialfall eines sehr allgemeinen Satzes, welcher formuliert und bewiesen wird. Beim Beweis wird eine Verschärfung von Erdős-Turan des Satzes von van der Corput-Koksma benutzt [On a

problem in the theory of uniform distribution, Proc. Akad. Wet. Amsterdam **51**, 1146—1154 (1948)]. Hlawka (Wien).

Gelfond, A. O.: Über einige allgemeine Fälle der Verteilung der Bruchteile von Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **64**, 437—440 (1949) [Russisch].

Es sei $L = (y_1, y_2, \dots)$ eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, $M = (P_1, P_2, \dots)$ eine Folge von Punkten des N -dimensionalen Raumes mit Koordinaten $P_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nN})$, die im N -dimensionalen Einheitswürfel überall dicht liegen, endlich sei $\varphi(y)$ eine monoton abnehmende reelle Funktion, $0 \leq \varphi(y) \leq 1$, $\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi(y) = 0$. Ein System von N Funktionen $f_j(y)$

($j = 1, 2, \dots, N$) sei mod 1 (φ, M) überall dicht verteilt genannt, wenn es für jedes n unendlich viele zu L gehörende y_k gibt, so daß $0 \leq f_j(y_k) - x_{nj} \leq \varphi(y_k)$ für $j = 1, 2, \dots, N$ gilt. Satz 1. $f_j(t, y)$ sei für $a_j \leq t \leq b_j$ und für $y \in L$ definiert, $\partial f_j / \partial t = f'_j(t, y)$ sei stetig und monoton nicht abnehmend in t , $f'_j(a_j, y) \geq 1$, ferner sei $f'_j(t, y)$ monoton zunehmend in y und $\lim_{y \rightarrow \infty} f'_j(t, y) = +\infty$ ($j = 1, 2, \dots, N$).

Unter diesen Voraussetzungen kann man für beliebiges $\varepsilon > 0$ Teilintervalle (c_j, d_j) der Länge ε von (a_j, b_j) finden und in jedem Intervall (c_j, d_j) eine Zahl α_j , so daß das System $f_j(\alpha_j, y)$ ($j = 1, 2, \dots, N$) mod 1 (φ, M) überall dicht verteilt ist. Satz 2. Wenn die Funktionen $f_j(t, y)$ außer den Bedingungen von Satz 1 der Bedingung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f'_j(a_j, y_{k+1})}{f'_j(b_j, y_k)} \varphi(y_k) = +\infty \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

genügen und wenn $M = (P_1, P_2, \dots)$ jetzt eine beliebige Folge (nicht notwendig verschiedener) Punkte des N -dimensionalen Raumes bedeuten, so kann man Zahlen α_j in (c_j, d_j) wie in Satz 1 finden, so daß

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f_j(\alpha_j, y_k) - x_{kj}] \frac{1}{\varphi(y_k)} = 0 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, N$$

stattfindet. Als Anwendung von Satz 2 gibt Verf. einen neuen Beweis des wohlbekannten Fabryschen Satzes über die Nichtfortsetzbarkeit lakunärer Potenzreihen.

A. Rényi (Budapest).

Korobow, N. M.: Über Summen von Bruchteilen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **67**, 781—782 (1949) [Russisch].

Es bedeute (x) den Bruchteil der reellen Zahl x . Es sei A_q die Menge aller reellen Zahlen α ($0 < \alpha < 1$), für welche

$$D_n(\alpha; q) = \sum_{k=1}^n (q^k \alpha) - n/2 = o(n)$$

gilt ($q \geq 2$ ganz.); nach einem wohlbekannten Satze [s. H. Weyl, Math. Ann., Berlin **77**, 313—352 (1916)] gehören fast alle reellen Zahlen α ($0 < \alpha < 1$) zur Menge A_q . Verf. behauptet folgende Sätze: 1. Für jede Funktion $\varepsilon(n)$ mit $\varepsilon(n) \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = 0$ gibt es ein $\alpha \in A_q$, für welches $D_n(\alpha; q) = O(n \varepsilon(n))$ nicht gilt.

2. Für jede Funktion $\omega(n)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(n) = +\infty$ gibt es ein α , für welches $D_n(\alpha; q) = o(\omega(n))$ gilt. Verf. bemerkt ferner, daß für fast alle $\alpha \in A_q$ $D_n(\alpha; q)$ von der Ordnung $O(\sqrt{n} \cdot \log \log n)$ ist. Tatsächlich folgt das leicht aus dem Satz des iterierten Logarithmus [s. A. Ja. Khintchin, Math. Z. **18**, 289—306 (1923)].

A. Rényi (Budapest).

Perron, Oskar: Diophantische Ungleichungen in imaginären quadratischen Körpern. Mat. Tidsskr. B, København **1949**, 1—17 (1949).

Es handelt sich um die Diophantischen Ungleichungen

(1) $|\alpha x + \beta y| \leq K$, (2) $|\alpha x + \beta y - \varrho| \leq L$
mit $|\alpha \delta - \beta \gamma| = 1$. Sind alle Koeffizienten α, \dots, σ reell, so gibt es nach Korkine

und Zolotareff für $K = 1/\sqrt{5}$ unendlich viele Lösungen bzw. nach Minkowski für $L = \frac{1}{4}$ mindestens eine Lösung in ganzen x, y , beide Schranken sind genau. Verf. läßt komplexe Koeffizienten α, \dots, σ zu und fragt nach Lösbarkeit in ganzen Zahlen x, y eines vorgelegten imaginär quadratischen Zahlkörpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$, wobei D eine quadratfreie natürliche Zahl ist. Satz 1: Ist

$$K = \frac{\sqrt{6D}}{\pi} \text{ für } D \not\equiv 3 \pmod{4} \text{ bzw. } K = \frac{\sqrt{6D}}{2\pi} \text{ für } D \equiv 3 \pmod{4},$$

so hat (1) unendlich viele Lösungen. Diese Schranken sind nicht genau, für $D = 1, 2, 3$ gelten nach Verf. (dies. Zbl. 4, 246 und 7, 338—339) die genauen Schranken bzw. $1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{13}$. Satz 2: Ist in den vorher unterschiedenen Fällen

$$L = \frac{1+D}{4} \left(\Delta + \frac{\sqrt{6D}}{\pi} \right) \text{ bzw. } L = \frac{(1+D)^2}{16D} \left(\Delta + \frac{\sqrt{6D}}{2\pi} \right),$$

wobei Δ die kleinste Zahl bedeutet, für die es in jeder Idealklasse von $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ ein Ideal mit der Norm $\leq \Delta$ gibt, so ist (2) lösbar. (Bekanntlich gilt $\Delta \leq 4D$ bzw. $\Delta \leq D$, und ist die Klassenzahl 1, so gilt $\Delta = 1$.) Die angegebenen Schranken sind wieder nicht genau. In einer früheren Arbeit [O. Perron: Ein Analogon zu einem Satz von Minkowski, S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1946, 159—165] sprach Verf. eine Vermutung über die genaue Schranke L aus, die insbesondere für $D = 1, 2, 3$ bzw. $L = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}$ sein soll. Eben daselbst bewies er diese Vermutung für $D = 1$, hier werden in Satz 3 bzw. Satz 4 die Fälle $D = 2, 3$ bejahend erledigt. Beispiele für extremale Polynome sind

$$\left(x - \frac{1+i\sqrt{2}}{2} \right) \left(y - \frac{1+i\sqrt{2}}{2} \right) \text{ bzw. } \left(x - \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}} \right) \left(y - \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}} \right).$$

Zum Beweis von Satz 1 wird

$$(1') \quad t|\alpha x + \beta y| + t^{-1}|\gamma x + \delta y| \leq 2\sqrt{K} \quad (t > 0)$$

(statt (1)) betrachtet. Wird zugleich $x = x_1 + \omega x_2, y = y_1 + \omega y_2$ eingeführt mit $\omega = i\sqrt{D}$ bzw. $\omega = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{D})$, so definiert (1') einen konvexen Körper im (x_1, x_2, y_1, y_2) -Raum, dessen Volumen sich beide Male zu 16 berechnet. Nach Minkowski wird dann (1') durch einen Gitterpunkt $(x_1, x_2, y_1, y_2) \neq 0$ befriedigt. Andererseits folgt (1) sofort aus (1'). Die unendlich vielen Lösungen werden durch die freie Wahl von t gesichert. Zum Beweis von Satz 2 wird $x = px' + qy', y = rx' + sy' \ (ps - qr \neq 0)$ angesetzt mit ganzen p, q, r, s in $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$, nach dem (2) als

$$(3) \quad |A(x' - \mu')^2 + B(x' - \mu')(y' - \nu') + C(y' - \nu')^2| \leq L$$

erscheint, wobei A, B, C homogene quadratische Formen in p, q, r, s sind. Insbesondere gilt $A = (\alpha p + \beta r)(\gamma p + \delta r)$. Wegen Satz 1 lassen sich p, r gemäß $|A| \leq K$ wählen, und dabei darf angenommen werden, daß die Norm des Ideals $(p, r) \leq \Delta$ ist. Dann kann man q, s gemäß $0 < ps - qr \leq \Delta$ wählen. Es wird noch y' als die am nächsten bei ν' gelegene ganze Zahl in $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ gewählt, und dann gelingt es endlich, auch die Existenz eines x' nachzuweisen, so daß (3) gilt. Dieser letzte Schritt verlangt im wesentlichen, die Existenz eines Gitterpunktes im Innern einer gewissen Cassinischen Kurve zu bestätigen. Zum Beweis der Sätze 3, 4 wird ähnlich vorgegangen bei Berücksichtigung der obigen genauen Resultate bezüglich (1) für $D = 2, 3$, und dann ist noch nötig, die auftretenden speziellen Cassinischen Kurven feiner zu untersuchen. Eine weniger gute Verfeinerung von Satz 2 wäre auch allgemein möglich. Rédei (Szeged).

Schmidt, Hermann: Zur Approximation und Kettenbruchentwicklung quadratischer Zahlen. Math. Z. 52, 168—192 (1949).

Der erste Teil der Arbeit beschäftigt sich mit den Heronischen Näherungen für Quadratwurzeln \sqrt{D} ($D \neq 0$ komplex), definiert durch $a_0 b_0 = D, b_{n+1} = D/a_{n+1}$,

$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ ($a_0 \neq 0$). Es wird gezeigt, daß die Folge konvergiert und zwar, bei passender Wahl des Vorzeichens, gegen \sqrt{D} , wenn $\Re(a_0/\sqrt{D}) \neq 0$. Eine Fehlerabschätzung wird gegeben und der Zusammenhang mit Produktformeln von Ostrowski [Verh. naturforsch. Ges. Basel 40, 153—214 (1929)] und Engel (vgl. Perron, Irrationalzahlen; dies. Zbl. 22, 123) hergestellt. Ist nun D aus einem Ring R , so daß \sqrt{D} nicht im Quotientenkörper von R liegt (R aus komplexen Zahlen bestehend), ist die Ungleichung $|p_0^2 - Dq_0^2| \leq 1$ in R lösbar mit $\Re(p_0/q_0\sqrt{D}) > 0$, dann gibt es Folgen $a_n = p_n/q_n$ (p_n, q_n aus R), so daß für genügend großes n und für jedes $\varepsilon > 0$

$$|a_n - \sqrt{D}| < \frac{1 + \varepsilon}{2|\sqrt{D}| |q_n|^2}$$

gilt, und zwar liefert das Heronische Verfahren eine solche Folge. Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn R eine Hauptordnung aus einem imaginär quadratischen Zahlkörper mit der Klassenzahl 1 ist. Es wird weiter untersucht, wann $\varepsilon = 0$ zulässig ist, der Zusammenhang mit den Kettenbrüchen hergestellt und der Fall reeller quadratischer Irrationalzahlen näher diskutiert. Im weiteren untersucht Verf., wann ein regelmäßiger Kettenbruch eine ganze quadratische Zahl mit positiver Differente darstellt. Für die genauere Formulierung sei auf die Arbeit verwiesen. Es sei nur bemerkt, daß die Untersuchung eine Verallgemeinerung der Bestimmung der Quadratwurzeln natürlicher Zahlen darstellt, für welche die Kettenbruchperiode, abgesehen vom Schlußglied, vorgeschrieben ist (Perron, Kettenbrüche, § 23. Dörrie, Quadratische Gleichungen). Den Abschluß bildet folgender interessanter Satz: Es sei $D_h(n) = n^2 + h$ (h, n ganz, $|h|$ entweder 3 oder ≥ 5). Dann ist es, wie groß auch die ganze Zahl n_0 sein mag, nicht möglich, die Menge aller ganzen Zahlen $n \geq n_0$ so in eine endliche Anzahl von Klassen K aufzuteilen, daß in jeder Klasse die Kettenbruchentwicklung $\sqrt{D_h(n)} = p_0(n), p_1(n), \dots, p_k(n)$ ($n \geq n_0$) besteht. Dabei sind die $p(n) > 0$ Polynome, welche für jede ganze Zahl ganze Werte annehmen und ebenso wie k von K abhängen. Es werden noch weitere Sätze und Beispiele angegeben; so werden z. B. Zahlenfolgen aus quadratischen Körpern konstruiert, welche Zahlen mit beliebig langer Vorperiode enthalten.

Hlawka (Wien).

Morduchaj-Boltovskoj, D.: Über hypertranszendente Funktionen und hypertranszendente Zahlen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 21—24 (1949) [Russisch].

Es bedeute (1) $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ eine algebraische Differentialgleichung. Eine Funktion $F(x)$, die einer Gleichung vom Typus (1) genügt, wird bekanntlich hyperalgebraisch, im entgegengesetzten Fall hypertranszendent genannt. Wenn die Koeffizienten von (1) sowie die in den Anfangsbedingungen $y^{(k)}(a) = b_k$ [$k = 0, 1, \dots, (n-1)$] vorkommenden Zahlen b_k algebraisch sind, so nennt Verf. die Funktion $y = F(x)$ algebraisch-hyperalgebraisch (kurz AHA), im entgegengesetzten Fall algebraisch-hypertranszendent (kurz AHT). Es wird gezeigt, daß die Potenzreihe $F(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$ eine AHA-Funktion darstellt, vorausgesetzt, daß alle a_n algebraische Zahlen sind und daß, wenn $P_n(x) = 0$ die irreduzible algebraische Gleichung k_n -ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten bedeutet, welche a_n zur Wurzel hat, die Zahlen k_n beschränkt sind; wenn nicht, so ist $F(x)$ AHT. So ist z. B. $F(x)$ AHT, wenn $a_n = b_n \sqrt[n]{p_n q_n}$, wo b_n eine rationale Zahl $\neq 0$, p_n eine Primzahl und q_n eine ganze Zahl mit $(p_n, q_n) = 1$ bedeuten. Es wird ferner gezeigt, daß es AHT Funktionen gibt, die für jedes algebraische x algebraische Werte annehmen. Dies ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Stäckel [Math. Ann., Berlin 46, 513—520 (1895)].

A. Rényi (Budapest).

Mahler, Kurt: On the successive minima of a bounded star domain. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 153—163 (1948).

Es sei $f(x)$ die beschränkte Distanzfunktion eines Sternbereiches K $f(x) \leq 1$ in der Ebene, und es sei A ein Gitter. Es werden nun alle voneinander linear unabhängigen Gitterpunktpaare p, q betrachtet, für die $K f(p) \leq f(q)$. Es seien nun $M_1(A) = \min f(p)$, $M_2(A) = \min f(q)$ die beiden sukzessiven Minima und $M(K) = \sup M_1(A) M_2(A)$ über alle Gitter mit fester Determinante. Dann wird folgender wichtiger Satz gezeigt: Es gibt ein Gitter A_0 (extremes Gitter genannt), so daß $M_1(A_0) M_2(A_0) = M(K)$. Der (komplizierte) Beweis wird mit Hilfe der Begriffe und Sätze aus der bereits klassischen Arbeit des Verf. aus den Proc. R. Soc., London, A 187, 151—187 (1946) geführt. Am Schluß der Arbeit wird ein Sternbereich mit $M(K) > 1$ angegeben, so daß also nicht jedes kritische Gitter extrem ist. Bei konvexen Körpern ist $M(K)$ stets 1, also jedes kritische Gitter extrem. Dabei sind die Gitter A so normiert, daß $\text{Det } A = \Delta(K)$, wo $\Delta(K) = \inf \text{Det } \bar{A}$, erstreckt über alle K -zulässigen Gitter \bar{A} .
Hlawka (Wien).

Analysis.

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

● Behnke, H.: *Infinitesimalrechnung. I.* 3. Aufl. Münster: Aschendorffsche Verlagsbuchh. 1947. V, 309 S.

● Behnke, H.: *Infinitesimalrechnung. II.* 2. Aufl. Münster: Aschendorffsche Verlagsbuchh. 1948. V, 353 S.

Arškin, G. Ja.: Zur Frage der Möglichkeit der Vertauschung der Zeichen für Limes und vollständige Variation in der Theorie der vollständig additiven Mengenfunktionen. Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 3 (31), 134—135 (1949) [Russisch].

Sei $\mathfrak{A}(H)$ ein σ -Körper, $\Phi_k(H)$ eine Folge dort definierter total additiver Mengenfunktionen, welche gegen $\Phi(H)$ konvergieren. Dann ist $\Phi(H)$ notwendig wieder totaladditiv (vgl. O. Nikodym, dies. Zbl. 8, 250). (Es sind offenbar endliche Mengenfunktionen vorausgesetzt.) In $\mathfrak{A}(H)$ existiere eine größte Menge E . Bekanntlich existiert eine Zerlegung $E = E^+ + E^-$ mit $E^+ \cap E^- = 0$ in \mathfrak{A} , so daß für die positive und negative Funktion von Φ gilt: $\Phi^-(E^+) = \Phi^+(E^-) = 0$. Ebenso gibt es Zerlegungen $E^+ = E_k^{+-} + E_k^{++}$ und $E^- = E_k^{-+} + E_k^{--}$ ($k = 1, 2, \dots$), so daß $\Phi_k^-(E^{++}) = \Phi_k^+(E^{+-}) = \Phi_k^-(E^{-+}) = \Phi_k^+(E^{--}) = 0$. Sei $V = \Phi^+ + \Phi^-$ die totale Variation von Φ , entsprechend V_k . Es wird der Satz bewiesen: Damit unter den o. a. Voraussetzungen aus $\Phi_k \rightarrow \Phi$ folgt $V_k \rightarrow V$, ist notwendig und hinreichend $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(E_k^{+-}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(E_k^{-+}) = 0$.
Schmetterer (Wien).

Rochlin, V.: Über die Grundbegriffe der Maßtheorie. Mat. Sbornik, n. S. 25 (67), 107—150 (1949) [Russisch].

Cet article concerne les mesures abstraites m définies sur un ensemble M quelconque, et vérifiant $m(M) = 1$. Le § 1 est principalement consacré à étudier comment, à partir de m et d'une famille quelconque Σ d'ensembles mesurables, on peut „engendrer“ une mesure (qui ne coïncide pas nécessairement avec m en ce sens qu'elle permet de mesurer moins d'ensembles que m); l'A. définit aussi ce qu'il appelle les „nombres caractéristiques“ de Σ ; ceux-ci permettent en un certain sens de représenter de façon précise les relations d'intersection existant entre les éléments de Σ . Dans le § 2, l'A. définit les mesures „de Lebesgue“, elles sont engendrées par un système dénombrable d'ensembles (permettant en outre de „séparer“ les points de M) et vérifient une autre condition plus compliquée, laquelle assure que tout homomorphisme d'une mesure de Lebesgue est un isomorphisme; ces mesures sont en outre équivalentes à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ (sous réserve naturelle-ment qu'elles ne présentent pas de masse ponctuelle); bien entendu, toutes les mesures qu'on rencontre dans la pratique sont de Lebesgue. Le § 3 examine le

problème de la „mesure quotient“, déjà traité par P. R. Halmos (ce Zbl. 31, 407; cette note rectifie des résultats antérieurs) et J. Dieudonné (ce Zbl. 30, 160); l'A. définit une relation d'équivalence R „mesurable“ pour m par une condition qui revient à la suivante: il existe une suite de fonctions mesurables f_n telle que xRy soit équivalent à $f_n(x) = f_n(y)$ pour tout n ; dans cette hypothèse, et si m est une mesure de Lebesgue, on a un théorème de décomposition analogue à ceux de Dieudonné et Halmos. Enfin, le § 4 est consacré à la classification, du point de vue de la théorie de la mesure, des relations d'équivalence mesurables; l'A. montre essentiellement que le „type“ d'une telle relation est déterminé par les masses ponctuelles qui apparaissent quand on applique les résultats du § 3 — résultat évidemment subtil, et du reste d'une démonstration compliquée. Notons en terminant que l'A. utilise systématiquement la technique „mesure des ensembles“, et que l'on pourrait simplifier fortement le § 3 en utilisant au contraire les méthodes „intégrales“, c'est-à-dire linéaires, ainsi qu'une extension connue du théorème de Lebesgue-Nikodym aux fonctions à valeurs dans le dual d'un espace de Banach séparable.

R. Godement (Nancy).

Eggleston, H. G.: Intersections of sets in Euclidean space. J. London math. Soc. 23, 92—100 (1948).

Eine einparametrische Schar $\{A(t)\}$ von Teilmengen $A(t)$ des E^n heißt stetig für den Parameterwert t_0 , wenn für $t \rightarrow t_0$ die Abweichung $\alpha(A(t), A(t_0)) \rightarrow 0$ geht; sie heißt rückstetig, wenn es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß aus $U(A(t_0); \delta) \cap A(t) \neq \emptyset$ folgt $|t - t_0| < \varepsilon$. Verf. beweist: Es sei G eine offene Menge im E^n und $\{S(t)\}$, $a \leq t \leq b$, eine stetige Schar von Strecken konstanter Länge L . Dann ist das lineare Maß $m(S(t)G)$ eine nach unten halbstetige Funktion von t . Wenn andererseits $\lambda(t)$ für $a \leq t \leq b$ eine nach unten halbstetige Funktion ist mit $0 \leq \lambda(t) \leq L$ und $\{S(t)\}$ außerdem rückstetig, so gibt es eine offene Menge G mit $m(S(t)G) = \lambda(t)$. Der Satz gilt auch, wenn man an Stelle von $S(t)$ und m eine Schar von k -dimensionalen kongruenten Würfeln bzw. das k -dimensionale Lebesguesche Maß setzt. Ferner wird bewiesen: Sind für $a \leq t \leq b$ $\{A(t)\}$ und $\{B(t)\}$ stetige Scharen von abgeschlossenen Mengen, wobei $A(t) \cap B(t)$ für jedes t zusammenhängend und nicht leer ist, dann ist auch die Vereinigung aller $A(t) \cap B(t)$ zusammenhängend. Anschließend einige Beispiele und Folgerungen.

Aumann (Würzburg).

•Rado, Tibor: Length and area. (Amer. math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 30.) New York: American Mathematical Society, 1948. VI, 572 p. \$ 6,75.

H. Lebesgue gab im Jahre 1900 in seiner Thèse eine Definition des Maßes einer Fläche S , das als ein nach unten halbstetiges Funktional in der Klasse der stetigen Flächen bei den Anwendungen und besonders in der Variationsrechnung von großer Bedeutung ist. Während es Tonelli im Jahre 1926 gelungen war, das Problem des Lebesgueschen Flächenmaßes der Flächen in nicht parametrischer Form zu lösen, hat das analoge Problem für Flächen in parametrischer Form immer beachtliche Schwierigkeiten topologischer Natur aufgewiesen. In vorliegendem Buch wird eine ausführliche Beschreibung der Untersuchungen gegeben, die Verf. seit 1928 und seine Schüler in den Kriegsjahren durchgeführt haben und in welche sich diejenigen von C. B. Morrey und G. T. Whyburn in Richtung der algebraischen Topologie einfließen. In den Kriegsjahren geschriebene Arbeiten des Ref. werden in vorliegendem Buch nicht behandelt, da dieselben erst nach Drucklegung des Buches in die Vereinigten Staaten gelangt waren, worauf Verf. in verschiedenen nachträglichen Abschnitten hinweist. — Das Buch zerfällt in fünf Teile, von denen jeder eine sachliche Behandlung und einen darauffolgenden Kommentar enthält, in dem auf geschichtliche Vorgänge und parallele Probleme hingewiesen wird. — In Teil I werden, ohne Beweise, topologische und analytische Begriffe und Sätze erwähnt: topologischer Raum, Peanoscher Raum (d. h. topologisch, kompakt, zusammenhängend, lokal zusammenhängend und metrisierbar), stetige Abbildungen, topologische Charakterisierung der 2-Kugel nach Kuratowski, der Franklin-Wienersche Satz über die Approximation von stetigen Abbildungen durch fast lineare Abbildungen, welche auf einer 2-Zelle oder einer 2-Kugel definiert sind; außerdem Konvergenzsätze für das Lebesguesche Integral, der Rademachersche Satz über die Differenzierbarkeit der Lipschitzschen Funktionen. — Teil II hat topologischen Charakter, und Verf. befaßt sich mit dem allgemeinen Problem der stetigen Abbildungen T , $T(P) = P^*$ eines

Peanoschen Raumes P in einem Peanoschen Raum P^* , die eindeutig, aber nicht notwendig eindeutig sind. Durch das Studium der Menge der Maximal-Kontinuen von P , auf denen T konstant ist, gelangt man auf klare und einfache Weise zu dem Beweis, daß jede auf einer 2-Zelle oder 2-Kugel definierte Abbildung T das Produkt einer monotonen Abbildung M und einer punktmäßigen (light) Abbildung L ist, $T = LM$, $M(P) \rightarrow \mathfrak{M}$, $L(\mathfrak{M}) \rightarrow P^*$, und es wird die Struktur des „Mittelraumes“ \mathfrak{M} vollkommen charakterisiert, welcher ebenfalls ein Peanoscher Raum ist. Dieser Satz, der „Faktorisierungssatz“, ist von grundlegender Bedeutung für die weiteren Ausführungen. Es werden die Äquivalenzbegriffe nach Lebesgue (L), Fréchet (F) und Kérékjártó (K) für stetige Abbildungen betrachtet, und es wird bewiesen, daß die L-Äquivalenz die F-Äquivalenz zur Folge hat und daß die F-Äquivalenz die K-Äquivalenz impliziert, aber nicht umgekehrt. Diese Beziehung zwischen der F- und K-Äquivalenz wurde von J. W. T. Youngs klargestellt. — Es wird des weiteren für Funktionale, welche sehr allgemeinen Bedingungen genügen (und das Lebesguesche Flächenmaß erfüllt die Bedingungen) der zyklische Additionssatz bewiesen, welcher zum Ausdruck bringt, daß der Wert eines gegebenen Funktionals für eine Abbildung T gleich ist der Summe der Werte desselben Funktionals für die Abbildungen (höchstens in abzählbarer Menge), welche T in bezug auf die zyklischen Elemente (2-Kugeln und 2-Zellen) des Mittelraumes \mathfrak{M} untergeordnet sind. Dieser Satz findet hier eine sehr einfache Behandlung. — Teil III hat analytischen Charakter und handelt vor allem von Intervallfunktionen, dem Burkillischen Integral und bezüglichen Derivationsätzen. Es werden dann Funktionen einer reellen Veränderlichen mit beschränkter und total stetiger Variation besprochen, sowie der Begriff der Vielfachheit N nach Banach und Vitali und der diesbezügliche Satz. Es folgt die Theorie der rektifizierbaren Kurven mit den grundlegenden Sätzen von Jordan und Tonelli. Sätze der Länglenkonvergenz, Beziehungen zwischen einem von einer ebenen geschlossenen Kurve eingeschlossenen Flächenmaß und dem klassischen Integral über die Kurve. Für Funktionen von mehreren reellen Variablen werden die Begriffe der Funktion mit beschränkter und total stetiger Variation nach Tonelli gebracht, und es werden Sätze über ihre Derivierbarkeit, ihre Integralmittel und über die Steinersche Ungleichheit gegeben. — In Teil IV werden die metrischen Eigenschaften der ebenen stetigen Abbildungen behandelt, und, da der Begriff der Vielfachheit N nach Banach und Vitali für das Lebesguesche Flächenmaßsystem nicht geeignet ist, wird der Begriff der „wesentlichen Vielfachheit“ f ($f \leq N$) eingeführt. Es werden dann die Begriffe einer ebenen Abbildung „mit wesentlich beschränkter Variation“ und einer „wesentlich absolut stetigen“ ebenen Abbildung eingeführt sowie die Begriffe der absoluten und relativen verallgemeinerten Funktionaldeterminanten. Es werden Integraleigenschaften der ebenen Abbildungen und eine allgemeine Formel für die Transformationen der Doppelintegrale gegeben. Es werden die Beziehungen zwischen dem Lebesgueflächenmaß und dem klassischen Doppelintegral für das Flächenmaß untersucht. [Ref. hat auf ganz anderem Wege äquivalente Begriffe ebener Abbildungen mit beschränkter Variation und ebener, absolut stetiger Abbildungen mit analogen Anwendungen auf die Transformationen der Doppelintegrale und auf das Flächenmaß der Flächen eingeführt.] Es folgen Konvergenz- und Abgeschlossenheitssätze für absolut stetige Abbildungen und eine Verallgemeinerung eines Hilssatzes von E. J. McShane für die Variationsrechnung. — Teil V ist dem Problem des Flächenmaßes der Flächen gewidmet; es wird ein Flächenmaßbegriff $\alpha(S)$ einer Fläche S oder „unteres Flächenmaß“ vom Typ des Flächenmaßes $G(S)$ eingeführt, welches schon von McShane und C. B. Morrey herangezogen wurde und für das $G(S) \leq \alpha(S) \leq L(S)$ gilt. Dieses Flächenmaß wird mit dem Flächenmaß $L(S)$ verglichen, und es wird bewiesen, daß $\alpha(S) = L(S)$ in sehr allgemeinen Fällen ist [wenn $L(S) < +\infty$, wenn $\alpha(S) = 0$, wenn S eine nicht parametrische Darstellung hat]. Es werden die Flächen charakterisiert, für die $\alpha(S) = 0$ ist. [Verf. erwähnt, daß Ref. bewiesen hat, daß immer $G(S) = L(S)$ gilt und so $G = \alpha = L$ ist. Ref. gab eine Charakterisierung des Flächentyps, welcher von Banach und Vitali vorgeschlagen wurde, für den $L(S) < +\infty$ ist.] Es folgt der Satz von C. B. Morrey über die Darstellung der Flächen, für die der „Mittelraum“ \mathfrak{M} eine 2-Zelle ist, eine Behandlung der Fläche in nicht parametrischer Form bis zu den Sätzen von Tonelli, Rado, Saks, L. C. Young und Angaben über das Geözesche Problem. *Lamberto Cesari (Bologna).*

Reichelderfer, Paul V.: Law of transformation for essential generalized Jacobians. *Duke math. J.* 16, 73—83 (1949).

Es seien zwei Koordinatensysteme $x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$ gegeben, welche ähnlich in einem euklidischen dreidimensionalen Raum E_3 orientiert sind; es gelten die Beziehungen (1) $x'_i = c_i + \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j$, $i = 1, 2, 3$, wo die Matrix $\|a_{ij}\|$ normal und orthogonal ist und $|a_{ij}| = 1$. Wenn wir eine Fréchet-Fläche S in E_3 haben und eine Abbildung von S : $x_i = x_i(u, v)$, $i = 1, 2, 3$, $(u, v) \in R$, wobei R ein beschränktes, einfaches Jordan-Gebiet in der uv -Ebene ist, dann erlauben die Beziehungen (1) eine weitere Abbildung von S : $x'_i = x'_i(u, v)$, $i = 1, 2, 3$, $(u, v) \in R$. Wenn S endliches

Lebesguesches Flächenmaß hat, dann ist es auf verschiedene Art möglich, Begriffe verallgemeinerter Funktionaldeterminanten $J_i(u, v)$, $J'_i(u, v)$, $i = 1, 2, 3$, der Paare $x_2 x_3$, $x'_2 x'_3$, $x_3 x_1$, $x'_3 x'_1$, $x_1 x_2$, $x'_1 x'_2$ der Funktionen $x_i(u, v)$, $x'_i(u, v)$ einzuführen. Diese verallgemeinerten Funktionaldeterminanten existieren fast überall in R^0 , wobei R^0 die Menge der inneren Punkte von R ist (vgl. T. Rado, vorsteh. Referat und L. Cesari, Sui fondamenti geometrici etc., Atti Accad. Italia, Mem., IV. S. 13, 1432 (1942) und dies. Zbl. 31, 15]. Mit Hilfe der verallgemeinerten Radoschen Funktionaldeterminanten beweist Verf., daß für jede Fläche S von endlichem Lebesgueschem Flächenmaß fast überall in R^0 die klassischen Beziehungen

$$J'_i(u, v) = a_{i1} J_1(u, v) + a_{i2} J_2(u, v) + a_{i3} J_3(u, v), \quad i = 1, 2, 3,$$

gelten. — Ein analoges Ergebnis unter denselben Bedingungen wurde von Ref. für die Cesarischen verallgemeinerten Funktionaldeterminanten zusammen mit anderen Tangentialeigenschaften erhalten (s. dies. Zbl. 31, 15). [Untersuchungen sind im Gange, zu beweisen, daß die verallgemeinerten Funktionaldeterminanten von Rado und Cesari fast überall identisch sind (Ref.).] L. Cesari (Bologna).

Rado, Tibor: Convergence in area. Duke math. J. 16, 61—71 (1949).

Es seien S, S_n , $n = 1, 2, \dots$, Fréchet-Flächen im xyz -Raum von endlichem Lebesgueschen Flächenmaß $L(S)$, $L(S_n)$; es seien T_i , T_{in} , $i = 1, 2, 3$, $n = 1, 2, \dots$, die ebenen Abbildungen (ebene Flächen), die man als Projektionen der Flächen S, S_n auf die Ebenen yz, zx, xy erhält. Verf. beweist, daß wir, wenn $S_n \rightarrow S$, $L(S_n) \rightarrow L(S)$ gilt, auch $L(T_{in}) \rightarrow L(T_i)$, $i = 1, 2, 3$, haben. Wie Verf. bei der Korrektur der Arbeit hinzufügte, wurde derselbe Satz schon früher vom Ref. bewiesen. Vorliegender Beweis ist einfacher als der des Ref., weil er nicht von einem von Ref. bewiesenem Satz Gebrauch macht, jedoch in beiden Fällen ist es erforderlich, daß Beziehungen wie $\alpha(S) = L(S)$ oder $G(S) = L(S)$ schon bewiesen sind, die im Kern der Theorie stecken. Die von Rado herangezogenen Funktionen g, α sind jedoch nicht wesentlich erforderlich, da man seine Überlegung auch mit den vom Ref. herangezogenen Funktionen G, g wiederholen kann. L. Cesari (Bologna).

Helsel, R. G.: Convergence in area and convergence in volume. Duke math. J. 16, 111—118 (1949).

Es sei S eine geschlossene orientierte Fréchet-Fläche im xyz -Raume R . S ist also das eindeutige aber, nicht notwendig eineindeutige stetige Bild einer orientierten Kugeloberfläche U . Es sei $L(S)$ das Lebesguesche Flächenmaß von S und $[S]$ die Menge der Punkte (x, y, z) der Fläche S im xyz -Raum. Es sei $i(x, y, z)$ der topologische Index der Fläche S , wobei $i(x, y, z) = 0$ in allen Punkten von $[S]$ ist. Nennen wir $V(S)$ oder von der Fläche S eingeschlossenes Volumen die Zahl $V(S) = \iiint_R |i(x, y, z)| dx dy dz$, wenn $i(x, y, z)$ L -integrierbar ist; $V(S) = +\infty$, wenn $i(x, y, z)$ nicht L -integrierbar ist. Das Volumen $V(S)$ ist ein nach unten halbstetiges Funktional, welches auch von T. Rado in einem neueren Beweis der bekannten isoperimetrischen Ungleichheit herangezogen wurde [Trans. Amer. math. Soc. 61, 530—555 (1947)]. Verf. beweist folgenden Satz: Wenn S_n eine Folge geschlossener Fréchet-Flächen ist, wenn $S_n \rightarrow S$, $L(S_n) \rightarrow L(S)$, wenn ferner $[S]$ eine dreidimensionale Nullmenge ist, dann gilt auch $V(S_n) \rightarrow V(S)$. L. Cesari.

Karamata, J.: Inégalités relatives aux quotients et à la différence de $\int fg$ et $\iint fg$. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 2, 131—143 u. serb. Zusammenfassung 144—145 (1948).

Verf. gibt einen, von A. Bilimovič stammenden, direkten Beweis für jene Verallgemeinerung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung, welche Spezialfall eines vom Verf. früher gefundenen Satzes [Complément au premier théorème de la moyenne, Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 1, 97—106 (1933); dies.

Zbl. 8, 345] ist. Diese Verallgemeinerung lautet:

$$\frac{A b(B-G) + a B(G-b)}{A(B-G) + a(G-b)} \cdot F \leq \int_0^1 f(t) g(t) dt \leq \frac{a b(B-G) + A B(G-b)}{a(B-G) + A(G-b)} \cdot F,$$

wo $0 < a \leq f(t) \leq A$, $b \leq g(t) \leq B$ ($0 \leq t \leq 1$); $F = \int_0^1 f(t) dt$, $G = \int_0^1 g(t) dt$ ist.

Der Beweis beruht auf der einfachen Tatsache, daß es zwischen a und A zwei Werte

y_1 und y_2 gibt, für welche $\int_0^1 f(t) g(t) dt = b F + (G-b) y_1 = B F - (B-G) y_2$ ist.

— Aus diesem Satze bzw. Hilfssatze leitet Verf. folgende Abschätzung für den Quotienten bzw. für die Differenz von $\int_0^1 fg$ und $\int_0^1 f \cdot \int_0^1 g$ ab:

$$\left(\frac{\sqrt{aB} + \sqrt{Ab}}{\sqrt{aB} + \sqrt{AB}} \right)^2 \leq \frac{\int_0^1 fg}{\int_0^1 f \int_0^1 g} \leq \left(\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{AB}}{\sqrt{aB} + \sqrt{Ab}} \right)^2$$

bzw.

$$\left| \int_0^1 fg - \int_0^1 f \int_0^1 g \right| \leq \min \left[\frac{(A-F)(F-a)(B-b)}{A-a}, \frac{(B-G)(G-b)(A-a)}{B-b} \right]$$

(in der ersten Formel sind a und b beide als positiv vorausgesetzt, in der zweiten keines der beiden). — Die Ergebnisse des Verf. verallgemeinern die Sätze von G. Grüss [Math. Z. 39, 215—226 (1934); dies. Zbl. 10, 16], E. Landau [Math. Z. 39, 742—744 (1935); dies. Zbl. 10, 396] und K. Knopp [Math. Z. 39, 768—776 (1935); dies. Zbl. 11, 12] sowie von G. Kowalewski [Ein Mittelwertsatz für ein System von n Integralen, Z. Math. Phys. 42, 153 (1897) und 43, 118 (1898)].

Aczél (Szeged).

Dwinas, S.: Eine Anwendung der Theorie der Stichproben auf Integraltheorie. Rev. math. Hisp.-Amer., IV. S. 7, 234—238 (1947) [Spanisch].

Es sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Das Intervall (x_i, x_{i+1}) wird in p gleiche Teile δ_{ij} ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$; $j = 1, 2, \dots, p$) geteilt. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p \cdot \int_{\delta_{ij}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

wobei aus jedem Intervall ein beliebiges Teilstück gewählt werden kann. Verf. wurde zur Betrachtung dieses Satzes durch die Vorgangsweise bei geschichteter Stichprobenwahl angeregt. — Dieses Resultat ist bereits in einer Arbeit von Adams and Morse [Bull. Amer. math. Soc. 45, 442—447 (1939); dies. Zbl. 21, 303] enthalten und ist seither verallgemeinert worden.

S. Vajda.

Aczél, John: New proof and extension of St. Fenyő's theorem on mean values of functions. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 22, Nr. 1, 4 S. (1949).

Sich auf frühere Arbeiten stützend (insb. dies. Zbl. 30, 27 und 301) beweist Verf. die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von St. Fenyő [Norske Vid. Selsk. Forhdl. 21, Nr. 38 (1948)]: Das Funktional $U(f(x))$, definiert für Funktionen $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, mit Unstetigkeiten höchstens erster Art, habe die folgenden Eigenschaften: a) $U(f_n) \rightarrow U(f)$ für f_n gleichmäßig $\rightarrow f$, b) $U(f) > U(g)$, wenn $f \geq g$ und mindestens in einem Teilintervall $f > g$, c) $U_y[U_x(F(x, y))] = U_y[U_x(H(x, y))]$, wo $H(x, y) = F(y, x)$ für $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ und $c \leq x \leq d$, $a \leq y \leq b$, und $H(x, y) = F(x, y)$ für alle übrigen (x, y) . Dann gilt

$U(f(x)) = u^{-1} \left(\int_0^1 u(f(x)) dw(x) + C \right)$ mit stetig wachsendem $u(t)$, wachsendem $w(x)$ und konstantem C .

Aumann (Würzburg).

Aczél, Jean, István Fenyő et Jean Horváth: Sur certaines classes de fonctionnelles. *Portugaliae Math.* **8**, 1—11 (1949).

Charakterisierung von Mittelwerten der Form $\varphi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi(f(x)) dx\right)$ bzw. $\varphi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi(f(x)) \alpha(x) dx\right)$ und von Funktionalen $\varphi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi(f(x)) \alpha(x) dx + C\right)$. Vgl. J. Aczél, vorsteh. Referat, St. Fenyő, *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **21**, Nr. 38 (1948), J. Horváth, ebenda **21**, 45—51 (1948). *Aumann* (Würzburg).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Laasonen, Pentti: Einige Sätze über Tschebyscheffsche Funktionensysteme. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I*, Nr. **52**, 24 S. (1949).

Es seien $n+1$ für $a < x < b$ beschränkte und stetige Funktionen $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ gegeben. Die linearen Aggregate

$$\varphi(x) = c_0 \varphi_0(x) + \dots + c_n \varphi_n(x)$$

bilden ein Tschebyscheffsches Funktionensystem, wenn bei beliebiger Wahl der $n+1$ Punkte x_1, \dots, x_{n+1} im offenen Intervall (a, b) die Determinante $|\varphi_i(x_j)|$ von Null verschieden ist. Verf. untersucht einige einfache Eigenschaften solcher Systeme, insbesondere die Existenz und Kennzeichnung „adjungierter“ Funktionen — das sind Funktionen, die zusammen mit dem gegebenen System $(n+1)$ -ter Ordnung ein solches $(n+2)$ -ter Ordnung bilden. Er zeigt: Es gibt für das System $n+1$ feste Punkte derart, daß jede adjungierte Funktion $\psi(x)$ am wenigsten von derjenigen Funktion $\varphi(x)$ des Systems abweicht, mit der sie in diesen festen Punkten übereinstimmt. Dabei ist die „Abweichung“ anders als sonst üblich durch das Integral $\int_a^b |\psi(x) - \varphi(x)| dx$ erklärt. Genauer wird der Fall behandelt, daß das System aus Polynomen höchstens n -ten Grades besteht. Schließlich wird gezeigt, daß man gewiß dann zu einem Tschebyscheffschen System eine Funktion adjungieren kann (sie wird sogar angegeben), wenn an Stelle der obigen Determinante die Wronskische Determinante $|\varphi_i^{(k)}(x)|$ als nirgends verschwindend vorausgesetzt wird.

W. Hahn (Berlin).

Wang, Fu Traing: On Riesz summability of Fourier series. III. *Proc. London math. Soc.*, II. S. **51**, 215—231 (1949).

Es sei (1) $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)$, $a_0 = 0$, die Fourierreihe einer mit der Periode 2π periodischen, in $(0, 2\pi)$ L -integrierbaren Funktion $f(x)$. Es seien $\tau > 0$, $\beta > 0$, $\omega \geq 2$ reelle Zahlen, und wir betrachten, für ein gegebenes x , die Rieszschen Summen und Mittel

$$C_{\beta, \tau}(\omega) = \sum_{n < \omega} \{\exp(\log \omega)^\beta - \exp(\log n)^\beta\}^\tau A_n(x), \quad m_{\beta, \tau}(\omega) = [1 : \exp(\tau \log \omega)^\beta] C_{\beta, \tau}(\omega)$$

Wir sagen, daß (1) im Punkt x $(R, \exp(\log \omega)^\beta, \tau)$ -summierbar mit der Summe s ist, wenn $m_{\beta, \tau}(\omega) \rightarrow s$ bei $\omega \rightarrow +\infty$. Man beachte, daß es sich um Rieszsche Summen und Mittel handelt in bezug auf die mit ω „schnell zunehmende“ Funktion $\exp[\tau(\log \omega)^\beta]$. [Für weitere neuere Untersuchungen über die Rieszsche Summierbarkeit in bezug auf diese und andere Funktionstypen sei auf F. T. Wang, *Proc. London math. Soc.*, II. S. **47**, 308—325 (1942); *J. London math. Soc.* **17**, 98—107 (1942); **18**, 155—160 (1943); J. M. Hyslop, *J. London math. Soc.* **24**, 91—100 (1949); dies. Zbl. **33**, 112 verwiesen.] Im folgenden eines der vom Verf. erhaltenen Ergebnisse. Setzen wir

$$\Phi(t) = [f(x+t) + f(x-t) - 2s]/2, \quad \Phi_\alpha(t) = \Gamma^{-1}(\alpha) \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \Phi(u) du, \quad t > 0,$$

wobei α eine gegebene Zahl ist. Wenn $\Phi_\alpha(t) = o[t^\alpha \cdot \log(1/t)]$ für $t \rightarrow 0$, dann ist (1) $(R, \exp[(\log \omega)^{1+1/\alpha}], \alpha + 1)$ -summierbar mit der Summe s . *L. Cesari.*

Picone, Mauro: Vedute matematiche sull'analisi dei periodi. Rend. Sem. mat., Torino 8, 5—6 (1949).

Kurzer Bericht über einen Vortrag über das Problem, unter welchen Bedingungen eine für alle reellen t definierte, aber nur für $0 < t < T$ bekannte Funktion sich mit hinreichender Annäherung in der Form $f(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{z_k t}$ ($-\infty < t < +\infty$) darstellen läßt, wo c_k, z_k reelle oder komplexe Konstante sind. Die Annäherung in dem endlichen Intervall ist bekanntlich möglich und wird z. B. durch die Methoden von Labrouste und Vercelli erzielt. Für den gesamten Definitionsbereich ist das Problem nur lösbar, wenn $f(t)$ die Lösung einer gewöhnlichen linearen und homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist. *K. Stumpff.*

Funktionentheorie:

Al'per, S. Ja.: Über die Vollständigkeit eines Systems analytischer Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 1029—1032 (1949) [Russisch].

Ein System von Funktionen $\{f_n(z)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) der komplexen Veränderlichen z , die in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G analytisch sind, wird in G vollständig genannt, wenn jede in G analytische Funktion $F(z)$ in jeder ganz im Inneren von G liegenden abgeschlossenen Menge G sich durch Summen der Form

$\sum_{k=1}^n A_k f_k(z)$ gleichmäßig approximieren läßt. Wenn G den Kreis $|z| < R$ enthält und jede in $|z| < R$ reguläre $F(z)$ durch eine gleichmäßig konvergierende Reihe $\sum_{k=1}^\infty B_k f_k(z)$ darstellbar ist, so wird das System $\{f_n(z)\}$ eine Basis in $|z| < R$ genannt. Es bedeute $K_{B'}$ die Klasse aller in einem den Punkt $z = 0$ im Innern enthaltenden einfach zusammenhängenden Gebiet B' (welches den Punkt $z = \infty$

nicht als inneren Punkt enthält) analytischen Funktionen $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ mit $a_k \neq 0$ für $k = 0, 1, 2, \dots$. Wenn B' ein Kreis $|z| < R$ ist, so sagen wir, daß $f(z)$ zur Klasse K_R gehört, und wenn noch $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1/R$ gilt, so heiße $f(z)$ zur Klasse K'_R gehörend. Verf. beweist folgenden Satz: 1. Wenn die Funktionen

$$(1) \quad f_n(z) = \sum_{k=0}^\infty b_k^{(n)} z^k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

in einem den Punkt $z = 0$ enthaltenden Gebiet G analytisch sind und $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ zur Klasse $K_{B'}$ gehört, so ist das System der Funktionen

$$(2) \quad F_n(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k b_k^{(n)} z^k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet G'' , das keinen Punkt der Form ab enthält wo a Randpunkt von G und b singulären Punkt von $f(z)$ bedeutet, vollständig. — Die folgenden Sätze werden behauptet: 2. Wenn die Funktionen (1) im Kreise $|z| < R_1$ analytisch sind und $f(z)$ zur Klasse K'_R gehört, so bilden die Funktionen (2) eine Basis im Kreise $|z| < R_1 R$. 3. Wenn $f(z)$ zu K_R gehört, setzen wir

$$(3) \quad f_n(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k^{(n)} a_k z^k \quad \text{und} \quad (4) \quad K_{n,s} = \frac{\sum_{k=s+1}^\infty |c_k^{(n)}|}{|c_s^{(n)}|}.$$

Wenn für $s = 0, 1, 2, \dots$ die Bedingung $\liminf_{n \rightarrow \infty} K_{n,s} = 0$ erfüllt ist, so bilden

die Funktionen (3) ein vollständiges System in $|z| < R$. 4. Wenn $f(z)$ zu $K_{G'}$ gehört, so ist das System $\{z^n f^n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) vollständig in G' . 5. Wenn $f(z)$ zu $K_{G'}$ gehört und $\lim \alpha_n = \alpha$ existiert und endlich ist, so ist das System $\{f(\alpha_n z)\}$ vollständig in jedem Bereich, in dem $f(\alpha z)$ analytisch ist und der den Punkt $z = \infty$ nicht im Innern enthält. 6. Wenn $f(z)$ zu $K_{G'}$ gehört und

$$(5) \quad R_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$$

gesetzt wird, so ist das System $R_n(z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) vollständig in G' . 7. Wenn $f(z)$ zu K'_R gehört, so bilden die Funktionen (5) eine Basis in $|z| < R$. 8. Wenn $f(z)$ zu K_R gehört, so ist das System der Funktionen $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} z^k$ ($n = 1, 2, \dots$) vollständig in $|z| < R$. A. Rényi (Budapest).

Friedman, G. A.: Zum Koeffizientenproblem der Funktionen der Klassen H_δ . Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 805—808 (1949) [Russisch].

Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ im Kreise $|z| < 1$ regulär. Wenn $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\delta d\varphi$ für $r < 1$ beschränkt bleibt, so sagt man, daß $f(z)$ zur Klasse H_δ gehört; wenn $f(z)$ zu H_δ gehört, sei

$$C_f = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|^\delta d\varphi \right)^{1/\delta}$$

gesetzt. Verf. beweist, daß, wenn $f(z)$ zu H_δ , $0 < \delta \leq 1$, gehört, gilt:

$$|a_n| \leq C_f \cdot (n+1)^{1/\delta-1} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{(n+1)^{1/\delta-1}} = 0.$$

Ferner wird eine hinreichende Bedingung für $f(z) \in H_\delta$ bewiesen. A. Rényi.

Rényi, Alfréd: On the coefficients of schlicht functions. Publ. Math., Debrecen 1, 18—23 (1949).

Die Funktion $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ sei im Kreise $|z| < 1$ regulär und bilde denselben auf ein Gebiet G ab, dessen Randdrehung α endlich ist, d. h. für welches der Richtungswinkel der Randtangente eine Funktion von beschränkter Schwankung ist. [Vgl. Ref., Ann. Acad. Sci. Fennicae A 33, Nr. 9 (1931); dies. Zbl. 1, 143.] Verf. beweist, daß

$$|a_n| \leq \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{\alpha - 2\pi}{k\pi} \right) \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Hieraus folgt $|a_n| \leq n^{(\alpha-2\pi)/\pi}$, welches im Falle $\alpha = 3\pi$ die Bieberbachsche Vermutung für schlichte Funktionen (1) $|a_n| \leq n$ ergibt. Falls $\alpha \leq 4\pi$, in welchem Fall das Bildgebiet notwendig schlicht ist, so existiert wenigstens eine Richtung derart, daß jede mit dieser parallele Gerade höchstens ein einziges Segment mit G gemeinsam hat. Dann gilt (1) nach einem Resultat von M. S. Robertson (dies. Zbl. 14, 120).

Goodman, A. W.: Note on regions omitted by univalent functions. Bull. Amer. math. Soc. 55, 363—369 (1949).

Als Beitrag zur Verzerrungstheorie beweist Verf. mit Hilfe eines Satzes von Pick und R. Nevanlinna, daß, wenn die im Einheitskreis regulär-schlichte Funktion $w = z + a_2 z^2 + \dots$ daselbst die Werte w mit $|w - c| \leq R$ ausläßt, $R \leq |c| (4|c| - 1) : (4|c| + 1)$ ist. Die Existenz von Extremalfunktionen zeigt, daß die Ungleichung die bestmögliche ist. Zu weniger scharfen Resultaten gelangt Verf. in bezug auf die Größe desjenigen Bruchteiles des w -Einheitskreises, den das Bild des z -Einheitskreises wenigstens bedecken muß. Mit Hilfe einer Hölderschen Integralgleichung wird gezeigt, daß der betreffende Flächeninhalt wenigstens die Hälfte des Kreises ausmacht. Durch Betrachtung spezieller Funktionen wird der Minimalinhalt der Fläche nach oben abgeschätzt. G. af Hällström (Åbo).

Pastidès, Nicolas: Sur quelques équations fonctionnelles. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 65, 277—298 (1948).

Im Mittelpunkt steht die Behandlung der Schröderschen Funktion $s = F(z)$ (hier Koenigssche Funktion genannt) bei einem rational indifferenten Fixpunkt $z_0 = f(z_0)$ einer bei $z = z_0$ analytischen Funktion mit $f'(z_0) = \exp[2\pi i k/n]$, wobei k und n natürliche Zahlen sind. Durch $F(z)$ wird die Schrödersche Funktionalgleichung erfüllt: $F(f(z)) = f'(z_0) F(z)$. Notwendig und hinreichend für deren Existenz ist bekanntlich, daß unter den Iterierten $f_v(z)$ von $f(z)$ die Identität vorkommt. Ist die Schrödersche Funktion im Falle $0 \neq |s| \neq 1$ abgesehen von einer multiplikativen Konstanten stets eindeutig vorhanden, so lassen sich hier aus einer

Lösung $F_I(z)$ zahlreiche andere gewinnen: $\sum_{v=M}^N c_v [F_I(z)]^{vn+1}$; bei geeigneter Wahl der c_v kann $M = -\infty$, $N = +\infty$ werden und noch eine konvergente Lösung entstehen. — Falls $f(z_0) = z_0$, $g(z_0) = z_0$ und natürliche Zahlen m und n existieren, so daß die Iterierten $f_m(z) = z$, $g_n(z) = z$ erfüllen, so gibt es gewisse notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß $f(g(z)) = g(f(z))$ ist; dies kann auf endlich viele Funktionen $f(z)$, $g(z)$, ..., $h(z)$ übertragen werden. Weiter wird die Funktionalgleichung $H(f(z)) = g(H(z))$ gelöst. Zuletzt wird eine Lösung $\Psi(z)$ der Funktionalgleichung $\Psi(f(z)) = g(\Psi(z))$ unter Anwendung der Schröderschen und Boettcherschen Funktion angegeben. Die Deduktionen bleiben funktionentheoretisch elementar; die den vorliegenden Gegenstand betreffenden Methoden und Ergebnisse von Cremer, Fatou, Julia, Lyche, Pfeiffer, Siegel und Tschebotarev werden nicht aufgegriffen.

Töpfer (Köln).

Haselgrove, C. B.: A connection between the zeros and the mean values of $\zeta(s)$. J. London math. Soc. 24, 215—222 (1949).

Ist $d_k(n)$ in der für $\Re(s) > 1$ konvergenten Dirichletreihe $\zeta(s)^k$ der Koeffizient von n^{-s} , so wird hier für $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ und alle positiven k mit $2k\mu(\sigma) + \nu^*(\sigma) < 1$ bewiesen, daß für $T \rightarrow \infty$

$$(1) \quad \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt \rightarrow \sum d_k^2(n) n^{-2\sigma}.$$

Bezeichnet $k(\sigma)$ die obere Grenze aller k , für die diese Beziehung gilt, so ist $1 \geq 2\mu(\sigma) \cdot k(\sigma) \geq 1 - \nu^*(\sigma)$ (2). Dabei ist $\mu(\sigma) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \xi$ mit $\zeta(\sigma + it) = O(t^\xi)$ für $t \rightarrow \infty$, $\nu(\sigma) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \xi$ mit $N(\sigma, T) = O(T^\xi)$ für $T \rightarrow \infty$ und $\nu^*(\sigma) = \nu(\sigma - 0)$. Es ist ν eine monoton abnehmende Funktion und bewiesen $\nu(\beta) < 1$ für $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$. Aus der Beschränktheit der linken Seite von (1) folgt [E. C. Titchmarsh, The zeta-function of Riemann, Cambridge 1930, § 6. 14, S. 94] $\mu(\sigma) \leq (2k)^{-1}$. Aus besseren Abschätzungen von $\mu(\sigma)$ und $\nu^*(\sigma)$ ergibt sich (1) für

$$\sigma > \max\left(1 - 2^{1-q}, 1 - \frac{q+1}{2k + (4c+2)(q+1)}\right),$$

wodurch ein für ganze k bewiesenes Resultat von Davenport [J. London math. Soc. 10, 136—138 (1935); dies. Zbl. 11, 294] verbessert wird. Beweismittel ist folgender Satz: wenn für feste β , σ ($\frac{1}{2} < \beta < \sigma < 1$) und $T > 10$ in $\Re(s) > \beta$, $T - \log^2 T < \Im(s) < T + \log^2 T$ $\zeta(s) \neq 0$ ist, wenn $k > 0$ und $0 < \eta < 1$ ist, so gibt es ein festes $\varphi > 0$, für das

$$\zeta^k(\sigma + iT) = \sum d_k(n) e^{-\delta n} n^{-(\sigma + iT)} = O(T^{-\varphi})$$

gilt, wenn $T^{-1} < \delta < T^{-\eta}$ ist.

Hoheisel (Köln).

Lammel, E.: Über eine zur Laplaceschen Differentialgleichung in drei Veränderlichen gehörige Funktionentheorie. I. Math. Z. 51, 658—689 (1949).

Die der Laplace-Gleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$ genügenden reellen homogenen Polynome n -ten Grades $U_n(x, y, z)$ bilden einen $(2n+1)$ -dimensionalen linearen Vektorraum

u^{2n+1} . Verf. legt in u^{2n+1} eine spezielle Basis $\mathfrak{B}^{(n)} = \{t_{\kappa}^{(n)}; u_{\lambda}^{(n)}; v_{\mu}^{(n)}; w_{\nu}^{(n)}\}$ fest, bestehend aus geeignet gewählten harmonischen Polynomen $t_{\kappa}^{(n)}(x, y, z)$, $u_{\lambda}^{(n)}(x, y, z)$, $v_{\mu}^{(n)}(x, y, z)$, $w_{\nu}^{(n)}(x, y, z)$ mit $1 \leq \kappa \leq [n/2] + 1$, $1 \leq \lambda, \nu \leq [(n+1)/2]$, $1 \leq \mu \leq [n/2]$. Zur Berechnung der $t_{\kappa}^{(n)}$, $u_{\lambda}^{(n)}$, $v_{\mu}^{(n)}$, $w_{\nu}^{(n)}$ stehen Rekursionsformeln zur Verfügung; insbesondere wird eine Formel angegeben, die die Elemente der Basis $\mathfrak{B}^{(m+n)}$ aus den Elementen von $\mathfrak{B}^{(m)}$ und $\mathfrak{B}^{(n)}$ zu berechnen gestattet. Dieser Zusammenhang zwischen den Basen verschiedenen Grades legt die Einführung eines besonderen Kalküls mit geordneten $(2n+1)$ -tupeln reeller Zahlen nahe. Unter einer „komplexen Zahl n -ter Stufe“ $Z^{(n)}$ wird für $n=0$ eine reelle Zahl, für $n=1, 2, \dots$ ein geordnetes $(2n+1)$ -tupel reeller Zahlen $(a_{\kappa}^{(n)}; b_{\lambda}^{(n)}; c_{\mu}^{(n)}; d_{\nu}^{(n)})$ mit $1 \leq \kappa \leq [n/2] + 1$, $1 \leq \lambda, \nu \leq [(n+1)/2]$, $1 \leq \mu \leq [n/2]$ verstanden; die $a_{\kappa}^{(n)}$, $b_{\lambda}^{(n)}$, $c_{\mu}^{(n)}$, $d_{\nu}^{(n)}$ heißen die Komponenten von $Z^{(n)}$. Zwei komplexe Zahlen n -ter Stufe sind gleich, wenn ihre Komponenten übereinstimmen. Die Summe zweier komplexer Zahlen n -ter Stufe $Z_{\alpha}^{(n)} = (a_{\alpha\kappa}^{(n)}; b_{\alpha\lambda}^{(n)}; c_{\alpha\mu}^{(n)}; d_{\alpha\nu}^{(n)})$, $\alpha = 1, 2$, wird als Vektorsumme

$$Z_1^{(n)} + Z_2^{(n)} = (a_{1\kappa}^{(n)} + a_{2\kappa}^{(n)}; b_{1\lambda}^{(n)} + b_{2\lambda}^{(n)}; c_{1\mu}^{(n)} + c_{2\mu}^{(n)}; d_{1\nu}^{(n)} + d_{2\nu}^{(n)})$$

erklärt. Jeder komplexen Zahl n -ter Stufe $Z_1^{(n)}$ kann eindeutig eine komplexe Zahl m -ter Stufe $\tilde{Z}_1^{(m)}$ ($m > n$) zugeordnet werden, dadurch, daß den Komponenten von $Z_1^{(n)}$ geeignet viele Nullen als neue Komponenten hinzugefügt werden; $Z_1^{(n)}$ und $\tilde{Z}_1^{(m)}$ heißen gleich. Unter der Summe der komplexen Zahlen $Z_1^{(n)}$ und $Z_2^{(m)}$ ($m > n$) wird sodann die komplexe Zahl $\tilde{Z}_1^{(m)} + Z_2^{(m)}$ verstanden. Schließlich wird zwei komplexen Zahlen beliebiger Stufen $Z^{(m)}$ und $Z^{(n)}$ eine komplexe Zahl $(m+n)$ -ter Stufe $Z^{(m+n)}$ als ihr Produkt $Z^{(m+n)} = Z^{(m)} \cdot Z^{(n)}$ zugeordnet, und zwar werden die Komponenten von $Z^{(m+n)}$ aus denen von $Z^{(m)}$ und $Z^{(n)}$ nach der gleichen Vorschrift bestimmt, die den Zusammenhang zwischen den Basen $\mathfrak{B}^{(m+n)}$, $\mathfrak{B}^{(m)}$ und $\mathfrak{B}^{(n)}$ herstellt. Es zeigt sich, daß mit den so definierten Verknüpfungen die komplexen Zahlen beliebiger Stufen einen Integritätsbereich bilden. — Nach diesen Vorbereitungen werden Funktionen einer komplexen Veränderlichen (x, y, z) betrachtet, wobei das System der reellen Veränderlichen (x, y, z) als Variable über dem Raum \mathfrak{B}^3 der komplexen Zahlen 1. Stufe angesehen wird. Unter einer Funktion n -ter Stufe $f_n[(x, y, z)]$ wird eine Abbildung einer Punktmenge von \mathfrak{B}^3 in den Raum \mathfrak{B}^{2n+1} der komplexen Zahlen n -ter Stufe verstanden; $f_n[(x, y, z)]$ wird also gegeben durch eingeordnetes $(2n+1)$ -tupel reeller Funktionen $(t_{\kappa}(x, y, z); u_{\lambda}(x, y, z); v_{\mu}(x, y, z); w_{\nu}(x, y, z))$ mit $1 \leq \kappa \leq [n/2] + 1$, $1 \leq \lambda, \nu \leq [(n+1)/2]$, $1 \leq \mu \leq [n/2]$. Beispiel: $f_n[(x, y, z)] = (x, y, z)^n$; als Komponentenfunktionen ergeben sich genau die harmonischen Polynome $t_{\kappa}^{(n)}$, $u_{\lambda}^{(n)}$, $v_{\mu}^{(n)}$, $w_{\nu}^{(n)}$, also die Elemente der Basis $\mathfrak{B}^{(n)}$ von u^{2n+1} . — Eine Funktion n -ter Stufe $f_n[(x, y, z)]$ heißt an der Stelle (x, y, z) differenzierbar, wenn es eine Funktion $(n-1)$ -ter Stufe $f_{n-1}^*[(x, y, z)]$ gibt, so daß für eine hinreichend kleine Umgebung von (x, y, z)

$$f_n[(x+h, y+k, z+l)] - f_n[(x, y, z)] = f_{n-1}^*[(x, y, z)] \cdot (h, k, l) + \Omega^{(n)}$$

wird, wobei $\Omega^{(n)} = (\alpha_{\kappa}^{(n)}; \beta_{\lambda}^{(n)}; \gamma_{\mu}^{(n)}; \delta_{\nu}^{(n)})$ eine Größe n -ter Stufe ist, deren Komponenten Funktionen von x, y, z, h, k und l sind, welche beim Grenzübergang $(h, k, l) \rightarrow (0, 0, 0)$ von höherer Ordnung als $\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$ Null werden. Als notwendig und hinreichend für die Differenzierbarkeit von $f_n(x, y, z)$ stellt sich heraus, daß die Komponentenfunktionen $t_{\kappa}(x, y, z)$, $u_{\lambda}(x, y, z)$, $v_{\mu}(x, y, z)$, $w_{\nu}(x, y, z)$ differenzierbare Funktionen von x, y, z sind und daß sie folgenden, den Cauchy-Riemannschen entsprechenden Differentialgleichungen genügen:

$$\frac{\partial T_{\kappa}}{\partial x} = \frac{\partial U_{\kappa}}{\partial y} = \frac{\partial W_{\kappa}}{\partial z}; \quad \frac{\partial T_{\kappa}}{\partial y} = \frac{\partial U_{\kappa-1}}{\partial x} = \frac{\partial V_{\kappa-1}}{\partial z}; \quad \frac{\partial T_{\kappa}}{\partial z} = -\frac{\partial W_{\kappa}}{\partial x} - \frac{\partial W_{\kappa-1}}{\partial x};$$

$$\frac{\partial U_{\lambda}}{\partial z} = -\frac{\partial V_{\lambda}}{\partial x} - \frac{\partial V_{\lambda-1}}{\partial x}; \quad \frac{\partial W_{\nu}}{\partial x} = \frac{\partial V_{\nu}}{\partial y}; \quad \frac{\partial W_{\nu}}{\partial y} = \frac{\partial V_{\nu-1}}{\partial x},$$

wobei $1 \leq \kappa \leq [n/2] + 1$, $1 \leq \lambda, \nu \leq [(n+1)/2]$ ist und T_{α} mit t_{α} , U_{β} mit u_{β} , V_{γ} mit v_{γ} und W_{δ} mit w_{δ} übereinstimmt, wenn $1 \leq \alpha \leq [n/2] + 1$, $1 \leq \beta, \delta \leq [(n+1)/2]$ und $1 \leq \gamma \leq [n/2]$ ist, sonst aber Null sind. — Schließlich werden Kurvenintegrale über Funktionen n -ter Stufe eingeführt. Es ergibt sich das folgende Analogon zum Cauchyschen Integralsatz: Ist $f_n[(x, y, z)]$ in allen Punkten eines einfach zusammenhängenden Gebietes G des (x, y, z) -Raumes differenzierbar, so verschwindet das Kurvenintegral $\oint_C f_n[(x, y, z)] d(x, y, z)$ längs jeder in G verlaufenden geschlossenen rektifizierbaren Kurve C .

Stein (Münster/Westfalen).

Cicco, John de: Functions of several complex variables and multiharmonic functions. Amer. math. Monthly 56, 315—325 (1949).

Eine komplexe Funktion $w = \Phi(u_1, \dots, u_n) + i\Psi(u_1, \dots, u_n)$ ist eine polygene Funktion der n komplexen Variablen $u_k = x_k + i y_k$, wenn die reellen Funktionen Φ und Ψ stetig sind und stetige erste partielle Ableitungen nach den reellen Variablen x_k und y_k besitzen. Sie heißt speziell analytisch polygen, falls Φ und Ψ als Funktionen der reellen Variablen x_k und y_k analytisch sind; in diesem Fall können x_k und y_k auch als komplexe Variable aufgefaßt und die Funktion w zu einer Funktion von $2n$ komplexen Variablen fortgesetzt werden. Dieser einfache Gedanke erlaubt es, zu einer reellen multiharmonischen Funktion, d. h. einer Funktion, die den n^2 Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_i \partial y_k} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial y_k} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial y_i} = 0 \quad (i, k = 1, \dots, n)$$

genügt, die konjugierte Funktion Ψ so zu konstruieren, daß $\Phi + i\Psi$ eine monogene Funktion der komplexen Variablen $u_k = x_k + i y_k$ wird. Ist Φ rational, algebraisch oder ganz, so gilt dasselbe für Ψ . Notwendige und hinreichende Bedingungen für multiharmonische Funktionen und Anwendungen auf Systeme von n polygenen Funktionen bilden den Schluß der Arbeit. Kriszten (Zürich).

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Cohn, Richard M.: A theorem on difference polynomials. Bull. Amer. math. Soc. 55, 595—597 (1949).

Es wird gezeigt: Ist J ein Differenzenkörper, der ein Element t enthält, das von allen Transformierten beliebig hoher Ordnung verschieden ist, so besitzt jedes perfekte Ideal im Ringe $J[y_1, \dots, y_n]$ eine Basis von $n + 1$ Differenzpolynomen. Der Beweis folgt in den Hauptlinien einem kurzen und eleganten Beweise des entsprechenden, für Differentialgleichungen gültigen Theorems, der in der in Kürze erscheinenden, revidierten Ausgabe des Buches „Differentialgleichungen vom algebraischen Standpunkt“ (Amer. math. Soc. Colloquium Publications 14) von J. F. Ritt zu finden sein wird. Krull (Bonn).

Cohn, Richard M.: Inversive difference fields. Bull. Amer. math. Soc. 55, 597—603 (1949).

Zu der vorliegenden Arbeit (ebenso wie zu der unmittelbar vorher besprochenen) vergleiche man die große Abhandlung: Manifolds of difference polynomials (dies. Zbl. 31, 304), sowie die ergänzende Note: A note on the singular manifolds of a difference polynomial [Bull. Amer. math. Soc. 54, 917—922 (1948)]. — In einem abstrakten Differenzenkörper F bildet die Menge aller ersten Transformierten einen Differenzenunterkörper F_1 , und es wird dabei F durch die Zuordnung der Elemente zu ihren ersten Transformaten umkehrbar eindeutig und isomorph auf F_1 abgebildet. Aus dieser Bemerkung folgt mühelos, daß jeder abstrakte Differenzenkörper F in einen „invertierbaren“ Differenzenkörper F^* eingebettet werden kann, der dadurch ausgezeichnet ist, daß jedes seiner Elemente die erste Transformierte eines anderen, gleichfalls zum Körper gehörigen Elementes darstellt. Der Einbettungssatz seinerseits läßt sich, wie Verf. an zwei wichtigen, die gewöhnlichen und die wesentlich singulären Mannigfaltigkeiten eines Differenzpolynoms A betreffenden Beispielen zeigt, systematisch benützen, um jedem Satz über Differenzengleichungen einen korrespondierenden gegenüberzustellen, in dem die Rollen, die die höchsten und die niedersten Transformaten der Unbekannten spielen, gerade vertauscht sind. Krull (Bonn).

Ionesco, D. V.: Sur une équation de récurrence à deux indices. Disqu. math. phys., Bucureşti 6, 49—80 (1948).

Zu einer differenzierbaren reellen Funktion $Y(x)$ und zu den beiden beliebigen reellen Konstanten λ und μ werden die Funktionen

$$Y_1(x) = \frac{d}{dx} [x^{1+\lambda+\mu} Y(x)], \quad Y_n(x) = \frac{d}{dx} [x^{1+\lambda} Y_{n-1}(x)] \quad (n = 2, 3, \dots)$$

definiert. Wird gesetzt:

$$Y_n = x^{n\lambda+\mu} \sum_{v=0}^n A_{n+1}^{v+1} x^v Y^{(v)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

so erfüllen die Koeffizienten A_q^p ($1 \leq p \leq q \leq 2$) die Rekursionsformeln:

$$A_{n+1}^1 = (\lambda + \mu + 1)(2\lambda + \mu + 1) \cdots (n\lambda + \mu + 1), \quad A_{n+1}^{n+1} = 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

und für $2 \leq p \leq n$: $A_{n+1}^p = (n\lambda + \mu + p) A_n^p + A_n^{p-1}$. Die Untersuchung der von $Y(x)$ unabhängigen Koeffizienten A_q^p geschieht durch Einsetzen der speziellen Funktion $Y(x) = (1-x)^{p-1}$. — Ohne Bezugnahme auf ein Funktionenproblem der oben angegebenen Art wird die Lösung des Rekursionssystems

$$A_{n+1}^p = (n\lambda + \mu + p\sigma) A_n^p + A_n^{p-1} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

behandelt, wobei σ eine weitere reelle Konstante ist. In der Matrix der A_q^p lassen sich gewisse Stellen als Anfangsbedingungen beliebig vorgeben. Es werden sechs derartige Fälle behandelt (z. B.: $A_k^k = 1$ für ein k , $A_p^p = 0$ für $p \neq k$, $A_n^0 = 0$ für $n = 0, \pm 1, \dots$), auf die man allgemeinere Ansätze reduzieren kann. *Töpfer*.

Montel, Paul: Sur quelques équations aux différences mêlées. Ann. sci. Ecole norm. sup., III. S. 65, 337—353 (1948).

Falls $h = \eta + i\eta'$ ist, so sei für die stetige Funktion $f(x, y)$ die Differenz erster Ordnung mit $\Delta_h[f(x, y)] = f(x + \eta, y + \eta') - f(x, y)$ und diejenige n -ter Ordnung mit $\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_n}[f(x, y)] = \Delta_{h_1} \{ \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_n}[f(x, y)] \}$ definiert. Drei verschiedene Spannen h, k, l heißen unabhängig, wenn die Menge aller $mh + nk + pl$ (m, n, p durchlaufen alle ganzen Zahlen) in der komplexen Zahlenebene überall dicht ist. Mittels vollständiger Induktion wird gezeigt, daß eine Lösung des Differenzensystems

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_n}[f(x, y)] = 0, \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \cdots \Delta_{k_n}[f(x, y)] = 0, \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \cdots \Delta_{l_n}[f(x, y)] = 0,$$

bei dem jedes Spannentripel h_i, k_j, l_s ($i, j, s = 1, 2, \dots, n$) unabhängig ist, ein Polynom vom Grade m darstellt. Falls ein einziges Tripel h_i, k_j, l_s nicht unabhängig ist, gibt es neben Polynomen auch andere Lösungen. Falls $m < n$ ist, bedarf es keiner Einschränkung für $f(x, y)$. Bei $m \geq n$ aber wird das Problem auf homogene Funktionen $f(x, y)$ zurückgeführt, und unter Anwendung apolarer Polynome findet man $m \leq 2(n-1)$. Für jeden m -Bereich $n \leq m \leq \frac{3}{2}(n-1)$ bzw. $\frac{3}{2}(n-1) \leq m \leq 2(n-1)$ ergeben sich verschiedene homogene Polynomtypen bzw. zusätzliche Bedingungen, die im einzelnen beschrieben werden. — Falls $f(x, y)$ eine analytische Funktion zweier komplexer Variablen und eine Lösung des Differenzensystems

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_n}[f(x, y)] = 0, \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \cdots \Delta_{k_n}[f(x, y)] = 0, \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \cdots \Delta_{l_n}[f(x, y)] = 0 \\ \Delta_{u_1} \Delta_{u_2} \cdots \Delta_{u_n}[f(x, y)] = 0, \Delta_{v_1} \Delta_{v_2} \cdots \Delta_{v_n}[f(x, y)] = 0$$

ist [wobei die komplexen Spannen $\eta = \eta_1 + i\eta_2$, $\eta' = \eta_3 + i\eta_4$ zu vierdimensionalem $h = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ führen und die h_i, k_j, \dots, v_s im vierdimensionalen Raum einen von zwei bestimmten Unabhängigkeitsgraden besitzen], so handelt es sich um ein Polynom. Die im Reellen gewonnenen Ergebnisse finden sich modifiziert wieder. *Töpfer* (Köln).

Dufresnoy, Jacques: Sur certains systèmes d'équations différentielles. Bull. Sci. math., II. S. 71I, 51—62 (1947).

L'A. considera sistemi di p equazioni differenziali ordinarie lineari in n funzioni incognite con $p < n$

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n \{a_{ij}(x) z'_j(x) + b_{ij}(x) z_j(x)\} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

per i quali stabilisce tre teoremi, di cui riportiamo il seguente: Si consideri una particolare famiglia di soluzioni del sistema (1), caratterizzate dai loro valori per $x = \alpha$. Se tutte le soluzioni della famiglia verificano per $x = \beta$ ($\alpha < \beta$) una medesima relazione della forma $\sum_{j=1}^n C_j z_j(\beta) = 0$, allora esistono n funzioni $c_j(x)$ per le quali è

$\sum_{j=1}^n c_j(x) z_j(x) = 0$ per $\alpha \leq x \leq \beta$. — Di tali teoremi l'A. fa applicazione al problema di Mayer per i sistemi di Monge e alla ricerca delle condizioni di integrabilità completa per i sistemi di Pfaff. S. Cinquini (Pavia).

Ansoff, H. I. and J. A. Krumhansl: A general stability criterion for linear oscillating systems with constant time lag. Quart. appl. Math. 6, 337—341 (1948).

In der Schwingungsgleichung mit Verzögerungsglied

$$(1)^* \quad J y''(t) + R y'(t) + \chi y(t) = -S y^{(n)}(t - \tau)$$

seien J, R, χ, S, τ gegebene positive Konstante und $n \geq 0$ ganzzahlig. Mit Hilfe der Laplace-Transformation wird die Stabilitätsfrage auf die Untersuchung der Nullstellen p von

$$(2) \quad f(p) = -1 \quad \text{mit} \quad f(p) = \frac{Sp^n e^{-p\tau}}{Jp^2 + Rp + \chi}$$

zurückgeführt. Die genaue Bedingung für die Stabilität lautet, daß (2) keine Wurzel p mit positivem Realteil hat. Für $n \geq 3$ ist das System stets instabil. Für $n = 0, 1, 2$ ist die Stabilität gesondert zu untersuchen, wobei Verff. $|f(i\alpha)| = 1$ betrachten, nach den möglichen Werten von α fragen, im allgemeinen vier kritische α -Werte erhalten und nach der Lage der α eine Reihe verschiedener Fälle unterscheiden.

Collatz (Hannover).

Levinson, Norman: Criteria for the limit-point case for second order linear differential operators. Časopis Mat. Fysiky, Praha 74, 17—20 und tschechische Zusammenfassg. 20 (1949).

In der Differentialgleichung (D) $(pu')' + qu = 0$ seien $p'(x), q(x)$ stetig und $p(x) > 0$ für große x . Die Funktion $M(x) > 0$ sei nicht abnehmend, und für alle $x \geq x_0$ gelte:

$$q(x) < K \cdot M(x), \quad \int (p(x) M(x))^{-1/2} dx = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p^{1/2}(x) \cdot M'(x) \cdot M^{-3/2}(x) < \infty.$$

Dann hat (D) höchstens eine unabhängige Lösung $u(x)$, die der Bedingung

$\int_{x_0}^{\infty} |u|^2 dx < \infty$ genügt (Grenzpunktfall). Beweismittel: Schwarzsche Ungleichung und eine Bemerkung von A. Wintner. Das Resultat enthält hinreichende Kriterien von Wintner und Hartmann für das Zutreffen des Grenzpunktfalles.

Wittich (Karlsruhe).

Babkin, B. N.: Über eine Modifikation der Methode des Akademiemitgliedes S. A. Čaplygin für die angenäherte Integration. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 213—216 (1949) [Russisch].

Verf. knüpft an eine Arbeit von S. A. Čaplygin [Tr. CAGI, V. 130 (1932)] und eine eigene Arbeit (s. dies. Zbl. 32, 170) an. Wiederum wird das Anfangswertproblem der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ behandelt. Dabei seien $f(x, y)$ und $\partial f / \partial y$ stetig in einem gewissen, den Punkt $A(x_0, y_0)$ enthaltenden Gebiet. Der Differentialgleichung werden zwei Differentialungleichungen für zwei Funktionen $z(x)$ und $t(x)$ zugeordnet mit $z(x_0) = t(x_0) = y_0$, und es wird eine neue Methode

zur Konstruktion zweier Funktionenfolgen $z_n(x)$ und $t_n(x)$ angegeben, die $y(x)$ von unten bzw. oben approximieren. Die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Unter- bzw. Oberfunktionen wird bewiesen. Die angegebene Methode erfordert im Gegensatz zu der von Čaplygin selbst angewandten keine Voraussetzungen über $\partial^2 f / \partial y^2$. Reutter (Karlsruhe).

Magenes, Enrico: Problemi di valori al contorno per l'equazione differenziale $y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 39—74 (1948).

Es wird das Randwertproblem für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(1) \quad y^{(n)} = \lambda f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

betrachtet, wo λ ein Parameter ist, von dem ein Wert $\bar{\lambda}$ so bestimmt werden soll, daß (1) für $\lambda = \bar{\lambda}$ wenigstens ein Integral besitzt, das Randbedingungen, die ein Polynom vom Grade n bestimmen, erfüllt. — In Kap. I wird ein Existenzsatz für die Gleichung (1) für den Spezialfall aufgestellt, in dem von den $n + 1$ Randbedingungen n sich auf ein und denselben Punkt beziehen, und eine weitere auf einen anderen Punkt. Der Beweis gründet sich auf ein Verfahren, das von Tonelli für Funktionalgleichungen vom Volterra'schen Typus eingeführt worden ist [Bull. Calcutta math. Soc. 20, 31—48 (1928)]. Ein zweiter Existenzsatz für die Gleichung (1) wird im Falle $n = 2$ für ganz allgemeine Randbedingungen aufgestellt, indem das Problem in eine nicht-lineare Integralgleichung transformiert und das Prinzip von Birkhoff-Kellogg-Caccioppoli benutzt wird. — Um den Fall eines beliebigen n und ganz allgemeiner Randbedingungen anzugreifen, stellt Verf. in Kap. II einige Sätze über Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit der Lösungen auf, von denen wir den folgenden anführen: Die Funktion $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ sei in dem Bereich C_∞ : $a \leq x \leq b$, $|y| < +\infty$, $|y'| < +\infty, \dots, |y^{(n-1)}| < +\infty$ definiert, $p(x)$ sei eine in (a, b) integrierbare, fast überall positive Funktion von der Eigenschaft, daß $p(x) \leq f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ in C_∞ gilt. Für jedes Punktepaar $(x, y_1, \dots, y_1^{(n-1)})$, $(x, y_2, \dots, y_2^{(n-1)})$ sei die Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(x, y_1, \dots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, \dots, y_2^{(n-1)})| &\leq \alpha(x) \varphi(y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)}) \\ &+ \varphi_1(y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)}) [\omega_0(y_1 - y_2) |y'_1 - y'_2| + \dots \\ &+ \omega_{n-2}(y_1^{(n-2)} - y_2^{(n-2)}) |y_1^{(n-1)} - y_2^{(n-1)}| + \beta(x)] \end{aligned}$$

erfüllt; darin sind $\alpha(x)$, $\beta(x)$ zwei in (a, b) integrierbare, nicht-negative Funktionen; die $\omega_j(u)$ ($j = 0, 1, \dots, n-2$) sind in $(-\infty, +\infty)$ definiert, nicht-negativ und in jedem endlichen Intervall integrierbar; $\varphi(u)$ und $\varphi_1(u)$ sind zwei in $0 < u < \infty$ stetige Funktionen mit $\varphi(u) > 0$, $\varphi_1(u) \geq 0$ und von der Eigenschaft, daß es ein

$K > 0$ gibt, für das $\varphi_1(u) \leq K \varphi(u)$ ist, und für $u_0 > \varepsilon > 0$ gilt: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{u_0} \frac{du}{\varphi(u)} = +\infty$.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es höchstens einen Wert des Parameters λ , dem eine einzige samt $y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$ absolut stetige Funktion $y(x)$ entspricht, die fast überall Lösung der Gleichung (1) mit den Randbedingungen

(2) $y(x_i) = y_{i,0}, \dots, y'(x_i) = y_{i,1}, \dots, y^{(v_i-1)}(x_i) = y_{i,v_i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) ist; darin sind x_1, \dots, x_k ($k \leq n+1$) verschiedene, der Reihe nach im Intervall (a, b) gegebene Punkte; v_1, \dots, v_k sind k positive, ganze Zahlen mit $v_1 + \dots + v_k = n+1$, und die $y_{i,h}$ ($h = 0, 1, \dots, v_i-1$; $i = 1, 2, \dots, k$) sind $n+1$ beliebige reelle Zahlen. — In Kap. III gelangt Verf. zu dem folgenden bemerkenswerten Existenz- und Eindeutigkeitssatz (von dem er noch einige Erweiterungen, die auch für Systeme von Differentialgleichungen gelten, angibt): Die Funktion $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ sei im Bereich C_∞ definiert, quasistetig in x und stetig in $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$, und es existieren zwei fast überall positive, integrierbare Funktionen $p(x), q(x)$ ($a \leq x \leq b$), so daß in C_∞ gilt: $p(x) \leq f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \leq q(x)$.

Außerdem genüge $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ Bedingungen, die die Eindeutigkeit der Lösung des Problems (1), (2) sichern. Dann gibt es einen einzigen Wert von λ , dem eine samt ihren Ableitungen bis zur $(n-1)$ -ten Ordnung absolut stetige Funktion $y_0(x)$ entspricht, die Lösung des Problems (1), (2) ist. *S. Cinquini.*

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Janet, Maurice: Sur la relation entre „équations canoniques“ et „problème de calcul des variations“ et sur certains systèmes différentiels du second ordre en involution. Bull. Sci. math., II. S. 71_I, 62—72 (1947).

L'A. considera il sistema di equazioni differenziali canoniche

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ove $H(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n; t)$ è una funzione nota, e studia il caso in cui l'Hessiano costituito dalle derivate parziali del secondo ordine della funzione H rispetto alle variabili y_i è identicamente nullo. *S. Cinquini (Pavia).*

Aronszajn, N.: Recherches sur les fonctions harmoniques dans un carré. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 27, 87—175 (1948).

Als Gegenstück zu den in einem Kreisgebiet harmonischen Funktionen untersucht Verf. die in einem quadratischen Gebiet $R: |x| < \pi, |y| < \pi$ harmonischen Funktionen. Als einfachste harmonische Funktionen dieser Art bieten sich die folgenden dar:

$$(1) \quad \cos mx \cosh my, \cos mx \sinh my, \sin mx \cosh my, \sin mx \sinh my;$$

$$(1') \quad \cosh nx \cos ny, \cosh nx \sin ny, \sinh nx \cos ny, \sinh nx \sin ny.$$

Ist $z = x + iy$, so besitzen die Funktionen (1) die Periode 2π , die Funktionen (1') die Periode $2\pi i$. Die Entwicklung einer harmonischen Funktion $h(z)$ nach den Funktionen des Systems (1) bzw. (1') bedingt eine Zerlegung in eine Summe von zwei harmonischen Funktionen,

$$(2) \quad h(z) = h_1(z) + h_2(z), \quad z \in R,$$

wobei $h_1(z)$ in dem Horizontalstreifen $|y| < \pi$ die Periode 2π besitzt, $h_2(z)$ in dem Vertikalstreifen $|x| < \pi$ die Periode $2\pi i$. Das Ziel der Arbeit ist, solche Zerlegungen und die aus ihnen folgenden Entwicklungen nach den Funktionen (1) und (1') zu studieren; es werden dabei Ergebnisse der gemeinsam mit G. H. Hardy verfaßten Abhandlung „Properties of a class of double integrals“ [Ann. Math., Princeton, II. S. 46, 220—241 (1945)] benutzt. — In einem ersten Abschnitt werden die Eigenschaften der einfach- und doppeltperiodischen harmonischen Funktionen beschrieben. Der Nachweis der Möglichkeit einer Zerlegung (2) wird erbracht; dies geschieht über die analytische Funktion $f(z)$, deren Realteil $h(z)$ ist. Auch das Verhalten der Komponenten h_1 und h_2 am Rand von R wird untersucht. Hieran schließen sich Betrachtungen über die harmonischen, auf R summierbaren Funktionen. Unter Benutzung eines Lemmas von Zaremba über die Entwicklung von h in eine Fouriersche Doppelreihe wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Harmonizität von h angegeben. Es folgen Untersuchungen über Funktionen h , deren p -te Potenz auf R summierbar ist. Je nach dem Typ (μ, ν) der Funktion h werden verschiedene Entwicklungen erhalten. Dabei sind die vier Typen $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ zu unterscheiden, je nachdem $h(x + iy)$ eine gerade (ungerade) Funktion in x , eine gerade (ungerade) Funktion in y ist. Es gibt hier Zerlegungen (2) mit beschränkten ersten Ableitungen. Die p -ten Potenzen der h_k sind zwar auf R summierbar, jedoch sind sie im allgemeinen im abgeschlossenen Quadrat nicht stetig, nicht einmal immer beschränkt. Der folgende Abschnitt handelt von den auf R quadratisch summierbaren Funktionen h . Für die Typen $(0, 0)$ und $(1, 1)$ kann eine Zerlegung (2) angegeben werden, so daß die h_k selbst wieder quadratisch summierbar

sind. Für den Typus $(0, 1)$ wird an Hand eines Gegenbeispiels gezeigt, daß eine Zerlegung in Funktionen der angegebenen Art nicht immer möglich ist. Es folgen eine Diskussion der Eigenschaften der Fourierkoeffizienten der h_k und Bemerkungen über die Bestimmung der Konstanten der Entwicklungen der h_k nach den Funktionen (1) und (1'). Im letzten Abschnitt werden Ergänzungen und Bemerkungen über die Möglichkeiten der Verallgemeinerung der erhaltenen Ergebnisse mitgeteilt, u. a. Einiges über die Lösung des Dirichletschen Problems bei quadratischem Gebiet. Quade (Hannover).

Amerio, Luigi: *Sui problemi di Cauchy e di Dirichlet per l'equazione di Laplace in due variabili.* Rend. Sem. mat., Torino 8, 57—70 (1949).

Es bilde die Funktion $z = \varphi(\tau)$ eine Umgebung des Kreises $|\tau| = 1$ der komplexen τ -Ebene umkehrbar eindeutig und konform auf eine gewisse Umgebung der Kurve $S: (1) z = \varphi(\tau) (|\tau| = 1)$ der Ebene $z = x + iy$ ab. Dann hat dort die Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems für die Gleichung $\Delta u = 0$ mit den Vorgaben $U(\tau) = (u)_S$, $U_n(\tau) = (\partial u / \partial n)_S$ für $|\tau| = 1$ die Gestalt:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \{U[g(\bar{z})] + U[f(z)]\} + \frac{1}{2} \{\omega[g(\bar{z})] - \omega[f(z)]\}$$

mit

$$\omega(\tau) = i \int U_n(\tau) \sqrt{\varphi'(\tau)} \psi'(\tau) d\tau.$$

Hierbei ist (2) $\bar{z} = \psi(\tau)$ und es sind $\tau = f(z)$ und $\tau = g(\bar{z})$ die Umkehrungen von (1) und (2). Um nun hieraus die Lösung des Dirichletschen Problems für das von S umschlossene Gebiet C herzuleiten, ist ω derart zu bestimmen, daß sich $u(x, y)$ harmonisch in ganz C hinein fortsetzen läßt. An den Beispielen der Ellipse und der der Gleichung $z = A\tau + \sum_{k=1}^N B_k \tau^{-k} (|\tau| = 1)$ entsprechenden Kurve wird dies (z. T. nur skizziert) dargestellt; die Lösungen ergeben sich explizit in Form unendlicher Reihen. Die gleichen Lösungen kann man, wie am Beispiel der Ellipse gezeigt wird, auch aus den in der üblichen Weise als Potentiale von Doppelbelegungen dargestellten Lösungsformen erhalten. Maruhn (Dresden).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Germa, R.-H.-J.: *Sur des fonctions généralisant les noyaux itérés des équations intégrales de Volterra, de seconde espèce.* Bull. Soc. Sci. Liège 16, 268—275 (1947).

In der Volterraschen Integralgleichung für $\psi(x)$:

$$\psi(x) = f_\infty(x) + \lambda \int_{x_0}^x K_\infty(x, s) \psi(s) ds$$

seien f_∞ und K_∞ als Grenzwerte der gleichmäßig konvergenten Folgen der Funktionen $f_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$; stetig in $x_0 \leq x \leq x_0 + h$) und $K_l(x, s)$ ($l = 1, 2, \dots$; stetig in $x_0 \leq x \leq x_0 + h$, $x_0 \leq s \leq x$) gegeben. Verf. konstruiert die sukzessiven Näherungen

$$\psi_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) + \lambda \int_{x_0}^x K_{n+1}(x, s) \psi_n(s) ds, \quad \psi_0(x) = f_0(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

und formt sie mit Hilfe von Funktionen um, die als Verallgemeinerung der üblichen iterierten Kerne angesehen werden können. Entsprechende Betrachtungen werden auch für Integralgleichungen für Funktionen zweier Veränderlichen durchgeführt. Maruhn (Dresden).

Germa, R.-H.-J.: *Sur la résolution des systèmes d'équations intégrales.* Bull. Soc. Sci. Liège 17, 2—5 (1948).

Verf. konstruiert zur Lösung des Systems Volterrascher Integralgleichungen

$$\varphi_k(x) = f_k(x) + \lambda \int_a^x \{K_{k1}(x, s) \varphi_1(s) + K_{k2}(x, s) \varphi_2(s) + K_{k3}(x, s) \varphi_3(s)\} ds \quad (k = 1, 2, 3)$$

die sukzessiven Approximationen $\varphi_k^{(0)}(x) = f_k(x)$,

$$\varphi_1^{(n+1)}(x) = f_1(x) + \lambda \int_a^x \{K_{11}(x, s) \varphi_1^{(n)}(s) + K_{12}(x, s) \varphi_2^{(n)}(s) + K_{13}(x, s) \varphi_3^{(n)}(s)\} ds,$$

$$\varphi_2^{(n+1)}(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^x \{K_{21}(x, s) \varphi_1^{(n+1)}(s) + K_{22}(x, s) \varphi_2^{(n)}(s) + K_{23}(x, s) \varphi_3^{(n)}(s)\} ds,$$

$$\varphi_3^{(n+1)}(x) = f_3(x) + \lambda \int_a^x \{K_{31}(x, s) \varphi_1^{(n+1)}(s) + K_{32}(x, s) \varphi_2^{(n+1)}(s) + K_{33}(x, s) \varphi_3^{(n)}(s)\} ds,$$

$[K_{kr}(x, s)$ stetig in $a \leq x \leq b, a \leq y \leq x]$ und zeigt die gleichmäßige Konvergenz für alle λ . Maruhn (Dresden).

Charles, Henri: Sur une certaine classe d'équations intégral-différentielles. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 291—295 (1947).

Verf. zeigt, daß die Integral-Differentialgleichung

$$\frac{dy(x)}{dx} = f[x, y(x)] + \int_{x_0}^x K(x, s) \Phi[s, y(s)] ds$$

[[f, Φ stetig in $x_0 \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b, K(x, s)$ stetig in $x_0 \leq x \leq x_0 + a, x_0 \leq s \leq x_0 + a]$ in dem Intervall $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ ($h > 0$, hinreichend klein) mindestens eine Lösung $y(x)$ mit $y(x_0) = y_0$ besitzt. Der Beweis beruht darauf, daß die Funktionen f und Φ in ihrem Definitionsbereich als Grenzwerte gleichmäßig konvergierender Folgen von Polynomen aufgefaßt werden können und daß für solche Polynome der Satz bereits bekannt ist. An einem Beispiel wird ferner gezeigt, daß unter den genannten Voraussetzungen nicht notwendig Unität vorliegen muß. Maruhn (Dresden).

Parodi, Maurice: Sur la détermination d'une famille de noyaux réciproques. Bull. Sci. math., II. S. 72, 66—68 (1948).

Nella classe dei nuclei $K(x, t)$ le cui trasformate di Laplace sono della forma: $\varphi(p) e^{-\psi(p)}$ con $\Re[\psi(p)] > 0$ e $\psi(p)$ funzione periodica di ordine due, si determinano quei nuclei che sono reciproci: cioè tali che dalla relazione:

$$g(t) = \int_0^\infty K(x, t) f(x) dx \quad \text{segua:} \quad f(t) = \int_0^\infty K(x, t) g(x) dx$$

e reciprocamente.

C. Miranda (Napoli).

Bruwier, L.: Sur l'application du calcul symbolique à la résolution d'équations fonctionnelles. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 230—245 (1948).

Ein System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten wird bekanntlich durch den symbolischen Kalkül (Laplace-Transformation) auf ein System von linearen algebraischen Gleichungen reduziert. Verf. verallgemeinert dies auf ein System von Funktionalgleichungen der Form

$$(1) \quad \frac{dx_r}{dt} + \sum_{s=1}^n a_{rs} x_s(jt) = f_r(t) \quad (r = 1, \dots, n),$$

wo $j^m = 1$ ist (m positiv ganz). Dazu muß man das symbolische Abbild von $x_s(jt)$

durch das von $x_s(t)$ ausdrücken. Nun besteht für die durch $H(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} h(t) dt$,

abgekürzt $H(p) \doteq h(t)$, geschaffene Korrespondenz bei reellem a bekanntlich der sog. Ähnlichkeitssatz $h(at) \doteq \frac{1}{a} H\left(\frac{p}{a}\right)$. Ist $h(t)$ eine ganze Funktion vom Exponentialtyp [also $H(p)$ im Unendlichen holomorph], so gilt dieser Satz auch für

komplexe a . Macht man für die x_s diese Voraussetzung, so entspricht dem System (1) das System

$$(2) \quad p X_r(p) + \sum_{s=1}^n a_{rs} X_s\left(\frac{p}{j}\right) = F_r(p) + p x_r(0).$$

Systeme dieser Art löst der Verf. zunächst in verallgemeinerter Form und wendet die Lösung dann auf den obigen Fall an. Sind die $X_r(p)$ bestimmt, so erhält man die x_r in bekannter Weise durch Umkehrung der Laplace-Transformation:

$$x_r(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{p} e^{tp} X_r(p) dp, \text{ wo } C \text{ eine Kurve der komplexen Ebene ist, die alle}$$

Singularitäten von $X_r(p)$ einschließt.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Mitra, S. C.: On certain selfreciprocal functions. Bull. Calcutta math. Soc. **41**, 1—5 (1949).

Es werden mehrere Funktionen angegeben, die hinsichtlich der Hankel- bzw. Sinus-Transformation selbstreziprok sind. Die Funktionen sind durch Reihen definiert, die nach Zylinderfunktionen fortschreiten. *Doetsch* (Freiburg i. Br.).

Oswald, Jacques: Sur quelques propriétés des signaux à spectre limité. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 21—22 (1949).

Es handelt sich in vorliegender Arbeit um eine rein mathematische Untersuchung einer Funktion $x(t)$, die quadratisch summierbar ist und deren Fouriersche Zugeordnete $X(f)$ außerhalb eines endlichen Intervalls $(-f_1, f_1)$ verschwindet. Die Funktion läßt sich in eine Reihe nach orthogonalen Funktionen $(\sin(2\pi f_1 t - n\pi))/(2\pi f_1 t - n\pi)$ entwickeln, wobei die Koeffizienten $x_n = x(n/2f_1)$ Funktionen von $n/2f_1$ sind. Es wird auf einige weitere Eigenschaften solcher Funktionen hingewiesen, insbesondere, daß sich die „charakteristischen Größen“ von $x(t)$ durch die Koeffizienten x_n ausdrücken lassen und daß auch alle Transformationen des $x(t)$ mit Hilfe der x_n untersucht werden können, wie näher ausgeführt wird. Anschließend werden einige Beispiele von Operatoren gebracht, u. zw. der Translations-Operator sowie der Ableitungsoperator d/dt . Es folgt ein kurzer Hinweis auf eine physikalische Anwendung: Einem verlustfreien Filter, dessen Durchlässigkeitsbereich größer oder gleich f_1 ist und das irgendwelche Phasenänderungen bewirkt, entsprechen die Einheitsoperatoren. Einem verlustfreien Filter, dessen Durchlässigkeit außerhalb des Intervalls $(0, f_1)$ liegt, entspricht ein Hermitescher Operator. *Picht*.

Babenko, K. I.: Über konjugierte Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **62**, 157—160 (1948) [Russisch].

Die Note enthält zunächst das Theorem I: Sei $f(x)$ L -integrierbar in $(-\pi, \pi)$ und periodisch mit der Periode 2π , sowie

$$(1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p |x|^\alpha dx < \infty \quad (p > 1; -1 < \alpha < p-1).$$

Dann gilt

$$(2) \quad \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x)|^p |x|^\alpha dx \right\}^{1/p} \leq A \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p |x|^\alpha dx \right\}^{1/p},$$

wobei A nur von p und α abhängt. $\bar{f}(x)$ ist die Konjugierte zu $f(x)$. Für $\alpha = 0$ ist dies ein bekannter Satz von M. Riesz [Sur les fonctions conjuguées, Math. Z. **27**, 218—244 (1927)]. Für $\alpha = -1$ vgl. Hardy-Littlewood (dies. Zbl. **14**, 214). I wird auf ein unendliches Intervall ausgedehnt, wobei an Stelle von $f(x)$ die Trans-

formierte $g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt$ tritt. Genauer gilt Theorem II:

$$\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^p |x|^\alpha dx \right\}^{1/p} < C \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p |x|^\alpha dx \right\}^{1/p} \quad \left(C = \frac{A_p}{p-\alpha-1} \right)$$

unter Voraussetzung des Analogons zu (1). A_p hängt nur von p ab. Der Beweis wird für $0 \leq \alpha < p-1$ angedeutet unter Verwendung des entsprechenden Riesz-schen Ergebnisses für $\alpha = 0$. Soviel Ref. sieht, impliziert dies $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ als Zusatzvoraussetzung. Verf. führt weiter an, daß durch geeignete Beispiele gezeigt werden kann, daß C für $\alpha \rightarrow -1$ oder $\alpha \rightarrow p-1$ beliebig groß

werden kann. — Sei $F(x) = \sup_{0 < |t| \leq \pi} \frac{1}{t} \int_x^{x+t} |f(u)| du$. Dann wird ohne Beweis Theorem III formuliert: Aus (1) folgt

$$(3) \quad \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^p |x|^\alpha dx \right\}^{1/p} \leq B \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p |x|^\alpha dx \right\}^{1/p},$$

B nur von p und α abhängig. — Mittels eines Lemmas von Hardy-Littlewood [A maximal theorem with function-theoretic applications, Acta math., Uppsala 54, 81—116 (1930)] folgt aus (3) die zu (2) analoge Ungleichung mit $F(x)$ statt $f(x)$,

$$\bar{F}(x) = \sup_{0 < h \leq \pi} -\frac{1}{\pi} \int_h^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} t/2} dt, \text{ wie ohne Beweis festgestellt wird. —}$$

Schließlich beantwortet Verf. eine Fragestellung von N. Bary, ob jede Grundmenge des Hilbertschen Raumes vom Riesz-schen Typus ist [vgl. N. Bary, Sur les bases dans l'espace de Hilbert, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 54 (1946)], gestützt auf (2), negativ. Zum Schluß wird das Theorem IV ausgesprochen: $F(x)$ sei die Fourier-

Transformierte von $f(x)$, $|f(x)|^p x^{p-2} \in L(-\infty, \infty)$, $p \geq 2$, $f(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a F(t) e^{-ixt} dt$.

Dann ist $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f(x, a)|^p |x|^{p-2} dx = o(1)$, $a \rightarrow \infty$. Schmetterer (Wien).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Kaplansky, Irving: Normed algebras. Duke Math. J. 16, 399—418 (1949).

L'A. utilise la terminologie et les résultats bien connus de Gelfand, Raïkov et Segal pour démontrer les propriétés suivantes des *-algèbres. Dans ce qui suit, A est une *-algèbre [i. e. une algèbre de Banach, munie d'un antiautomorphisme involutif $x \rightarrow x^*$ tel que $(\lambda x)^* = \lambda x^*$ si $\lambda \in R$]. A est dite symétrique (resp. c -symétrique) si tout xx^* a un quasi-inverse (resp. si toute sous-algèbre commutative, self-adjointe et fermée de A est symétrique). Toute *-algèbre symétrique est c -symétrique. Si A est complexe et si $\|xx^*\| \geq k \|x\| \cdot \|x^*\|$, ou bien si A est réelle et si $\|xx^* + yy^*\| \geq \|x\|^2$, A est c -symétrique. Si A est c -symétrique et si tout idéal à gauche régulier maximal est l'annulateur d'un idéal à droite minimal, A est symétrique. Une b^* -algèbre (resp. c^* -algèbre) est une algèbre c -symétrique (resp. symétrique) A telle que $\|xx^*\| = \|x\|^2$ pour tout $x \in A$. L'algèbre obtenue en ajoutant une unité à une c^* -algèbre est symétrique. Soit A une b^* -algèbre; si φ est un *-isomorphisme de A sur une sous-algèbre partout dense d'une b^* -algèbre B , φ est une isométrie de A sur B ; si T est la sous-algèbre de A engendrée par un élément self-adjoint, et si I est un idéal fermé de A , l'homomorphisme canonique de $T/(T \cap I)$ dans A/I est une isométrie. Une c^* -algèbre est isomorphe à une sous-algèbre fermée et self-adjointe de l'algèbre des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert complexe. Si A est une b^* -algèbre (resp. c^* -algèbre), un idéal fermé I de A est self-adjoint et A/I est une b^* -algèbre (resp. une c^* -algèbre). Si une b^* -algèbre possède un idéal à droite minimal, c'est une c^* -algèbre. Si (A_i) est une famille de b^* -algèbres, la sous-algèbre A de $\prod A_i$, formée des (x_i) tels que $\|x_i\| < +\infty$ et normée par $\|(x_i)\| = \sup \|x_i\|$ est appelée le b^* -produit des A_i ; la sous-algèbre A' de A formée par les (x_i) tels que $\|x_i\| \leq \varepsilon$ pour tout i sauf un nombre fini, est appelée la b^* -somme des A_i ; A et A' sont des b^* -algèbres. Si $P(A)$ est l'espace obtenu en munissant l'ensemble des idéaux primitifs de A de la topologie de Stone,

pour que $P(A)$ (A étant une b^* -algèbre) soit discret, il faut et il suffit que A soit b^* -somme de b^* -algèbres simples. Il en résulte que, si A est une b^* -algèbre complètement continue (i.e. telle que $x \rightarrow yx$ et $x \rightarrow xy$ soient des opérateurs complètement continus), A est b^* -somme d'algèbres de dimensions finies et réciproquement; si A est une b^* -algèbre duale (cf. I. Kaplansky, ce Zbl. 31, 344), A est b^* -somme d'une famille d'algèbres des opérateurs complètement continus d'espaces de Hilbert sur les réels, les complexes ou les quaternions, et réciproquement. Une b^* -algèbre A est dite centrale si quels que soient les idéaux primitifs P et Q de A $P \cap Z = Q \cap Z$ entraîne $P = Q$ (Z centre de A). Si A est une b^* -algèbre centrale, $P(A) = P(Z)$ est localement compact, et compact dans le seul cas où A possède une unité. Soit A une b^* -algèbre centrale satisfaisant à une identité polynomiale; il existe une b^* -algèbre simple de dimension finie M , un espace localement compact E et une représentation $g \rightarrow u_g$ du groupe G des $*$ -automorphismes de M dans le groupe des homéomorphismes de E tels que A soit isomorphe à l'algèbre des applications continues f de E dans M nulles à l' ∞ , satisfaisant à $f(u_g(x)) = g(f(x))$ ($x \in E$ et $g \in G$). L'A. indique qu'on peut étudier à partir de ces résultats toutes les c^* -algèbres satisfaisant à une identité polynomiale. Ce travail est complété par des exemples et une bibliographie. J. Braconnier (Lyon).

Cartan, Henri et Roger Godement: Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 64, 79—99 (1947).

Es wird eine Darstellung der harmonischen Analyse auf beliebigen lokalkompakten Abelschen Gruppen G gegeben. L^1 sei der Raum der bezüglich des Haarschen Maßes auf G summierbaren Funktionen mit der Norm $\|f\|_1 = \int |f(x)| dx$, L^∞ der Raum der auf G beschränkten und auf jeder kompakten Teilmenge summierbaren Funktionen mit $\|f\|_\infty = \sup_{x \in G} |f(x)|$. L^∞ ist zu L^1 dual: $\varphi \in L^\infty$ erklärt die Linearfunktion $(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx$ auf L^1 . Zuerst werden die Hauptsätze der Gelfand-Raikovschen Theorie der Funktionen von positivem Typus auf G dargestellt, gleich für nichtabelsche Gruppen; im Abelschen Fall ergibt sich daraus, daß jede konvexe, im Sinn der schwachen Topologie von L^∞ abgeschlossene Teilmenge von L^∞ , die 0 und alle Charaktere von G enthält, mit der Menge P_0 aller Funktionen φ von positivem Typus und $\varphi(e) \leq 1$ (e die Einheit von G) übereinstimmt. \hat{G} sei die Gruppe der Charaktere von G , (x, \hat{x}) der Wert des Charakters \hat{x} auf $x \in G$. Jedem $f \in L^1$ wird die Fouriertransformierte $\hat{f}(\hat{x}) = \int (x, \hat{x}) f(x) dx$ zugeordnet. Diese Fouriertransformierten bilden auf dem durch Hinzunahme der 0 zu einem kompakten Raum G' ergänzten \hat{G} einen Ring von stetigen Funktionen, die alle für $\hat{x} = 0$ verschwinden. Es wird der Satz von Bochner bewiesen, daß die Funktionen von P_0 die Fouriertransformierten der positiven Maße von der Gesamtmasse ≤ 1 auf \hat{G} sind. V sei die Menge der komplexen Linearkombinationen von Funktionen von positivem Typus auf G , $V^1 = V \cap L^1$, $V^2 = V \cap L^2$; auf \hat{G} heißt es entsprechend \hat{V}^1 , \hat{V}^2 . Auf \hat{G} läßt sich der willkürliche Faktor des Haarschen Maßes $d\hat{x}$ so wählen, daß sich aus der Fouriertransformierten $\hat{f}(\hat{x}) = \int (x, \hat{x}) f(x) dx$ eines $f \in V^1$ umgekehrt $f(x)$ zurückgewinnen läßt als $f(x) = \int (x, \hat{x}) \hat{f}(\hat{x}) d\hat{x}$ (Fouriersches Umkehrtheorem). Die Fouriertransformierte von $f \in V^1$ gehört zu \hat{V}^1 . Diese Zuordnung läßt sich zu einer Isomorphie von V^2 auf \hat{V}^2 fortsetzen (Satz von Plancherel). In einfacher Weise ergeben sich schließlich daraus die Sätze der Pontrjagin-van Kampenschen Dualitätstheorie der lokalkompakten Abelschen Gruppen, z. B. daß $\hat{\hat{G}}$ isomorph zu G ist. G. Köthe (Mainz).

Motchéane, Léon: Sur la représentation paramétrique des ensembles de vecteurs dans l'espace de Hilbert. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 353—355 (1949).

Pour donner un critère de convergence d'une suite de vecteurs d'un espace d'Hilbert, qui soit adapté à la topologie faible et à la topologie forte, l'A. introduit la notion de fonction représentative d'un ensemble de vecteurs. Soit (X^n) une suite de vecteurs, (c_i^n) les coordonnées de X^n par rapport à un système orthonormé complet (e_i) ; soit $(x_i(t))$ une suite de fonctions continues définies dans un intervalle $[a, b]$ telles que, t_n étant une suite croissante dans $[a, b]$, on ait: $x_i(t_n) = c_i^n$ pour $i = 1, 2, \dots$, $x_i(t)$ monotone pour $t_n < t < t_{n+1}$, $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i(t)|^2$ convergente pour $t_1 \leq t < t_0 = \sup t_n$. La fonction représentative de (X^n) est $X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) e_i$.

Si, pour une suite partielle (t_{n_p}) , $X(t_{n_p})$ converge faiblement [vers $X^0 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t_0) e_i$] quand $t_{n_p} \rightarrow t_0$, on dira que (X^n) „converge faiblement au sens de Hilbert“ vers X^0 . La convergence faible habituelle correspond au cas où cette condition est vérifiée pour toute suite partielle. La convergence est forte ou faible suivant que $X(t)$ est continue ou discontinue en t_0 . L'oscillation de $X(t)$ permet de retrouver les quatre cas de convergence (forte ou faible) signalés par G. Julia. Plus généralement, l'A. considère une fonction représentative d'un ensemble de vecteurs, $X(T) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(T) e_i$, où $T = (t_1, \dots, t_k)$ est le point générique d'un domaine $D \subset R^k$ et $x_i(T)$ est une fonction continue séparément par rapport à chacun des t_1, \dots, t_k . En utilisant les résultats de sa note „Sur la répartition des points de continuité... [C. r. Acad. Sci., Paris 199, 17—18 (1934); ce Zbl. 9, 245], il déduit, de la convergence de $\sum |x_i(T)|^2$, quelques propriétés de l'ensemble des points de convergence forte.

A. Pereira Gomes (Paris).

Plans y Sanz de Bremond, Antonio: Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum und ihr Spektrum. Rev. Acad. Ci. exact. físic. natur. Madrid 42, 309—392 (1949) [Spanisch].

Dans la suite de deux articles „Espacio de Hilbert de n dimensiones“ et „Espacio de Hilbert“, parus dans la même revue [Rev. Acad. Ci. exact. físic. natur. Madrid 40 (1946) et ce Zbl. 30, 130], l'A. fait un exposé de notions et résultats fondamentaux concernant les opérateurs linéaires de l'espace de Hilbert séparable et leur spectre, en suivant de près soit le livre de B. v. Sz.-Nagy „Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes“, Berlin 1942; ce Zbl. 27, 227 (de p. 13 à 27 pour le premier et les deux derniers paragraphes), soit le livre de G. Julia „Introduction mathématique aux théories quantiques“ Paris 1936; ce Zbl. 14, 335 (pour le second paragraph), soit encore celui de M. H. Stone „Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis“ New York 1932; ce Zbl. 5, 400 (de p. 128 à 150, pour le troisième paragraph). L'article termine avec une analyse détaillée de la classification du spectre des opérateurs normaux et hilbertiens.

A. Pereira Gomes (Paris).

Haefeli, Hans Georg und Franco Pellegrino: Die Reihe von Fantappiè und die Stetigkeit der analytischen nicht linearen Funktionale. Comment. math. Helvetici 23, 153—173 (1949).

In questa Memoria gli autori proseguono le proprie ricerche (questo Zbl. 30, 34) sui funzionali analitici secondo Fantappiè e pervengono al seguente notevole risultato: — Ogni funzionale analitico F non lineare che sia limitato in un intorno (A, σ) di una funzione $y_0(t)$ è continuo in $y_0(t)$. — La dimostrazione di questa proposizione è basata sullo sviluppo del funzionale F in serie di Fantappiè, nonchè su altre proprietà stabilite nel lavoro in questione. Tra queste citiamo la seguente estensione ai funzionali analitici del noto teorema di Liouville per le funzioni trascendenti intere: Ogni funzionale analitico trascendente intero che sia limitato in tutto il suo campo di esistenza si riduce a una costante. S. Cinquini (Pavia).

Praktische Analysis:

Lohman, John B.: An iterative method for finding the smallest eigenvalue of a matrix. *Quart. appl. Math.* 7, 234 (1949).

Ist a ein Näherungswert für die dem Betrage nach kleinste charakteristische Zahl der Matrix A , so wendet Verf. das übliche Iterationsverfahren (Bilden der Vektoren v, Bv, B^2v, \dots mit einem willkürlich gewählten Vektor v) an auf die Matrix $B = (A - aE)^{-1}$ oder $(A - aE)^{-1} - bE$ mit E als Einheitsmatrix und b als einer geeignet gewählten Zahl, derart, daß bei B die größte charakteristische Zahl möglichst stark überwiegt. *Collatz (Hannover).*

Herzberger, M.: The normal equations of the method of least squares and their solution. *Quart. appl. Math.* 7, 217—223 (1949).

Zur Lösung eines linearen Gleichungssystems wird nach Erwähnung einiger bekannter Verfahren die Methode nach Schur, Banachiewicz und Dwyer, bei der im wesentlichen die Koeffizientenmatrix als Produkt zweier Dreiecksmatrizen dargestellt wird, einheitlich mit Vektoren beschrieben und die Vektorenvorstellung zur geometrischen Deutung der Operationen herangezogen. Für die numerische Rechnung empfiehlt Verf., die aus den Spalten der Koeffizientenmatrix gebildeten Vektoren erst in Einheitsvektoren überzuführen, um nach Möglichkeit Genauigkeitsverluste zu vermeiden. *Collatz (Hannover).*

Hartree, D. R.: Notes on iterative processes. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 45, 230—236 (1949).

Eine Gleichung $y = f(y)$ mit einer Lösung Y soll durch ein Iterationsverfahren gelöst werden, wobei y eine Zahl, einen Vektor oder eine Matrix bedeuten kann. Ist η_n der Fehler des Resultates nach n -maliger Wiederholung des Verfahrens, so nennt der Verf. ein Iterationsverfahren von k -ter Ordnung, wenn für η_{n+1} gilt: $\eta_{n+1} = a_1 \eta_n + a_2 \eta_n^2 + a_3 \eta_n^3 + \dots$, wobei $a_\lambda = f^{(\lambda)}(Y)/\lambda!$ ($\lambda = 1, 2, \dots$) und $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$. Es wird gezeigt, daß, wenn für eine gegebene Gleichung ein Iterationsverfahren $(k+1)$ -ter Ordnung existiert, es mehr als ein Verfahren k -ter Ordnung gibt; und umgekehrt ist es allgemein möglich, aus 2 verschiedenen Verfahren k -ter Ordnung $f_I(y)$ und $f_{II}(y)$ ein solches $(k+1)$ -ter Ordnung $f_{III} = \varrho f_I + (1-\varrho) f_{II}$ bei geeignet gewähltem ϱ abzuleiten. — Als Beispiel wird unter anderem für das bekannte Newtonsche Verfahren (hier als Newton-Raphson-sches Verfahren bezeichnet) $y_{n+1} = y_n - \Phi(y_n)/\Phi'(y_n)$ gezeigt, daß es von 2. Ordnung ist. Für die Gleichung $z = a^{1/p}$ mit positiv oder negativ ganzzahligem p werden Formeln für Verfahren 2. und 3. Ordnung hergeleitet. — An einem Beispiel wird auch für eine Differentialgleichung 3. Ordnung mit Randbedingungen ein Iterationsverfahren behandelt. — Die Untersuchung und Herleitung geeigneter Iterationsverfahren, speziell auch für Differential- und Integralgleichungen, wird besonders im Hinblick auf große automatische Rechenanlagen wie die ENIAC hervorgehoben und als dringende Aufgabe gefordert. *R. Ludwig (Braunschweig).*

Domb, C.: On iterative solutions of algebraic equations. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 45, 237—240 (1949).

Der Verf. setzt die Ausführungen von Hartree über Iterations-Verfahren fort (s. vorsteh. Referat) und wendet sie auf algebraische Gleichungen der Form $\Phi(y) = \Psi(y)$ an, wobei $\Phi(y)$ und $\Psi(y)$ Polynome sind. Das Iterationsverfahren soll die Form $y_{n+1} = g(y_n)/h(y_n)$ haben, wobei $g(y)$ und $h(y)$ ebenfalls Polynome sind. Indem man das konstante Glied auf die rechte Seite der Gleichung bringt, kann man $\Phi(y)$ durch y teilbar voraussetzen, also $\Phi(y) = y\chi(y)$, und erhält, wenn $p(y)$ ein willkürlich wählbares Polynom und

$$q(y) = p'(y) [y\chi(y) - \Psi(y)] + p(y) [y\chi'(y) - \Psi'(y)]$$

ist, die beiden Polynome

$$h(y) = p(y)\chi(y) + q(y), \quad g(y) = p(y)\Psi(y) + yq(y).$$

Als Beispiel ergibt sich für die Bestimmung der Quadratwurzel $y^2 = a$ bei der Wahl von $p(y) = 1$ das Newtonsche Verfahren $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + a/y_n)$ als Iterationsverfahren 2. Ordnung und bei der Wahl von $p(y) = y$ eine auch von Hartree angegebene Formel $y_{n+1} = 2y_n^3/(3y_n^2 - a)$. In einem anderen Beispiel für die reduzierte kubische Gleichung ergibt sich mit $p(y) = 1$ wieder das Newtonsche Verfahren. Auch für nichtalgebraische Gleichungen wie $y = e^{2y}$ lassen sich Iterationsformeln nach derselben Methode herleiten. — Eine weitere Methode liefert Iterationsverfahren von beliebiger Ordnung. In einem Zahlenbeispiel für die reduzierte kubische Gleichung wird gezeigt, daß bereits y_3 auf 15 Dezimalen richtig ist.

R. Ludwig (Braunschweig).

Sponder, Erich: Ein Näherungsverfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen 4. Grades. *Elemente Math.*, Basel **4**, 116—117 (1949).

Ein Polynom vierten Grades mit reellen Koeffizienten a_v wird in ein Produkt zweier quadratischer Polynome zerlegt, wo bei der Zerlegung ein Koeffizient P geschätzt wird, die übrigen Koeffizienten der Zerlegung sich aus P und den a_v berechnen lassen und dann P so zu variieren ist, daß die Zerlegung stimmt.

Collatz (Hannover).

Thomas, Joseph Miller: Nomographic disjunction. *Duke math. J.* **16**, 419—432 (1949).

Die Bedingung, unter welcher eine Funktion $F(x, y, z)$ sich in die bekannte Massausche Determinantenform bringen und durch eine Fluchtentafel darstellen läßt, wird eingehend untersucht. Das geschieht in Vervollständigung und Erweiterung der Duporcq'schen Untersuchungen, wobei Differentiationen vermieden werden. Die Anwendung der erzielten, für die Nomographie bemerkenswerten, Ergebnisse bleiben einer späteren Veröffentlichung vorbehalten.

Nyström (Helsinki).

Greenwood, Robert E. and Masil B. Danford: Numerical integration with a weight function x . *J. Math. Physics*, Massachusetts **28**, 99—106 (1949).

Eine Approximation $\int_0^1 x f(x) dx \approx \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n f(x_i, n)$ erweist sich anwendbar für $n = 1, 2, 3$ aber nicht für $n = 4, \dots, 10$. Dagegen gibt es mehrere Approximationen der Form

$$\int_{-1}^{+1} x f(x) dx \approx k_m \sum_{i=1}^m [f(x_{im}) - f(-x_{im})],$$

die für $m = 2, 3, 4$ angeführt werden. Diese Formeln können etwa bei der Berechnung von Momenten empirischer Verteilungsfunktionen mit Vorteil angewandt werden.

Nyström (Helsinki).

Hartley, H. O.: Tests of significance in harmonic analysis. *Biometrika*, Cambridge **36**, 194—201 (1949).

In der Periodogrammanalyse ist es üblich, die Realitätskriterien für verborgene Periodizitäten aus der a priori-Hypothese abzuleiten, daß die Glieder der zu untersuchenden Reihe um ihren Mittelwert nach den Gesetzen des Zufalls streuen. In der Praxis wird man es vielfach mit Problemen zu tun haben, in denen man a priori bereits mit systematischen Bestandteilen des vorgelegten Untersuchungsmaterials zu rechnen hat. Das Niveau, an dem die Bedeutung (significance) der Periodogramintensitäten abzuschätzen ist, wird dann nicht durch den Mittelwert aller Intensitäten gebildet, sondern durch die Reststreuung, die nach Aussonderung der systematischen Bestandteile (etwa derjenigen harmonischen Ordinaten, die schon bekannten Periodizitäten angehören) übrig bleibt. Die Theorie stützt sich auf frühere Arbeiten des Verf. und anderer Autoren, die in einem Literaturverzeichnis zusammengestellt werden. Ein einfaches Beispiel aus der Meteorologie erläutert die Anwendung. *Stumpff*.

Jowett, G. H.: The calculation of sums of squares and products on a desk calculating machine. J. R. statist. Soc., Ser. B, London **11**, 89—90 (1949).

Verf. zeigt, daß durch geschickte Anordnung der Rechnung und bei ausreichender Kapazität der Rechenmaschine gleichzeitig drei der in dem Ausdruck

$\sum_k (x_{ik}t + k_{ik})(x_{pk}t + x_{qk})$ vorkommenden Quadrate und Produkte berechnet werden können.

W. Meyer zur Capellen (Aachen).

Carter, A. E. and D. H. Sadler: The application of the national accounting machine to the solution of first-order differential equations. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford **1**, 433—441 (1948).

Die National Buchungsmaschine, die schon wiederholt, u. a. von Comrie, für mathematische Rechnungen benutzt wurde, wird zunächst kurz beschrieben. Hier wird sie unter Verwendung der Formel von Milne,

$$y_n - y_{n-4} = 4h \left(f + \frac{2}{3} \delta^2 + \frac{7}{90} \delta^4 - \frac{2}{945} \delta^6 \dots \right)_{n-2},$$

die bis zur vierten Differenz benutzt wird, zur genäherten abschnittswisen Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung benutzt. In den einzelnen Abschnitten wird iteriert. Die Einrichtung des Rechenganges speziell für diese Maschine wird beschrieben, kurz auf die Genauigkeit des Verfahrens eingegangen und die Rechnung an einem einfachen Beispiel im einzelnen erläutert. Willers (Dresden).

Kilburn, T.: The University of Manchester universal high-speed digital-computing machine. Nature, London **164**, 684—687 (1949).

Beschreibung der Einrichtungen des von Williams und Kilburn gebauten Rechenautomaten der Universität Manchester, der wie alle neueren Automaten für die Rechnung das Dualsystem benutzt. Die Übertragung der Dezimal- in Dualzahlen und das Umgekehrte soll später automatisch erfolgen. Als Innenspeicher dienen Schirme von Kathodenstrahlröhren, als Außenspeicher rotierende vernickelte Trommeln, auf denen die Zahlen magnetisch aufgezeichnet werden und aus denen zur Vermeidung einer Verlangsamung der Rechengeschwindigkeit Zahlen oder Anweisungen gruppenweise in den Innenspeicher übernommen werden können. Die einzelnen Daten haben Kennziffern, die zu ihrer Überführung in die Rechenkreise benutzt werden. Die Arbeitsweise dieser Kreise und die Zusammenarbeit der einzelnen Teile der Maschine werden beschrieben. Die Einleitung einiger Arbeitsgänge erfolgt noch provisorisch mit Hand, auch diese werden automatisiert werden.

Willers (Dresden).

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Bendersky, L.: Sur quelques problèmes concernant les épreuves répétées. Bull. Sci. math., II. S. **72**, 99—107 (1948).

Wie oft kommt im Bernoullischen Falle eine Reihe a) von s , bzw. b) von genau s oder c) von mindestens s Erfolgen vor? und wie viele Versuche sind notwendig, um eine solche Reihe zu erhalten? — Verf. gibt die Erwartungswerte: für das direkte (sehr einfache) Problem a) $(n + c_1) p^s q / (1 - p^s)$, b) $(n + c_2) p^s q^2$, c) $(n + c_3) p^s q$ (n = Anzahl der Versuche; c_i = von n unabhängige Zusatzterme); für das umgekehrte Problem, als reziproker Grenzwert, $N_s = (1 - p^s) / p^s q$, $= 1 / p^s q$. Letzter Beweisgedanke scheint nicht ohne weiteres befriedigend; die Lösung ist aber richtig, wie man z. B. folgendermaßen feststellt. Es kann entweder ein erster Mißerfolg am ersten, zweiten, ..., s -ten Versuche vorkommen, oder es ergibt sich die Reihe von s Erfolgen (Fall a) bereits mit s Versuchen; die Wahrscheinlichkeiten dieser $s + 1$ Fälle sind q , pq , p^2q , ..., $p^{s-1}q$ und p^s , und die

bedingten Mittelwerte $1 + N_s, 2 + N_s, \dots, s + N_s$ und s . Daher

$$N_s = sp^s + N_s(1-p^s) + \sum_{h=1}^s h p^{h-1} q = N_s(1-p^s) + (1-p^s)/q, \quad N_s = (1-p^s)/p^s q.$$

Analog verfährt man in den Fällen b) und c), wo die Versuche bis zum ersten Mißerfolg, welcher eine Reihe von genau s , bzw. von mindestens s Erfolgen schließt, fortzusetzen sind.

Bruno de Finetti (Trieste).

Cansado Maceda, E.: Über die faktorielle charakteristische Funktion. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 7, 159—164 (1947) [Spanisch].

Die faktorielle charakteristische Funktion einer Zufallsveränderlichen X mit Verteilung $F(x)$ ist wie folgt definiert: $\omega(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (1+z)^x dF(x)$. Es gilt

$$\omega(z) = 1 + \frac{z}{1} \mu'_1 + \frac{z^2}{2!} \mu'_2 + \dots,$$

wobei $\mu'_{(r)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(x-1)\dots(x-r+1) dF(x)$ als r -tes faktorielles Moment (bezüglich des Ursprungs) bezeichnet wird. Es gilt ferner $\omega(z) = \varphi(t)$, wenn $\varphi(t)$ die gewöhnliche charakteristische Funktion und $z = e^{it} - 1$ ist. — Wenn die Zufallsveränderliche nur die diskreten Werte $0, 1, 2, \dots$ annehmen kann und dies mit Wahrscheinlichkeit p_x ($x = 0, 1, \dots$) geschieht, dann lassen sich diese Wahrscheinlichkeiten durch

$$p_x = \frac{1}{x!} \left(\frac{d^x \omega(z)}{dz^x} \right)_{z=-1}$$

und die faktoriellen Momente durch

$$\mu'_{(r)} = \lim_{z \rightarrow 0^-} \left(\frac{d^r \omega(z)}{dz^r} \right)_{z=0}$$

ausdrücken. Als Beispiele werden die Binomialverteilung, die Poissonverteilung und die Verteilung

$$\frac{1}{x!} \left(\frac{\Gamma(x+h/d)}{\Gamma(h/d)} \right) (1+d)^{-h/d} \left(\frac{d}{1+d} \right)^x$$

(Pólya-Verteilung) behandelt.

S. Vajda (Epsom/England).

Feller, W.: Die fundamentalen Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 95—132 (1948) [Spanisch].

Übersetzung einer Arbeit im Bull. Amer. math. Soc. 51, 800—832 (1945). Verf. beschreibt die Bedeutung und Entwicklung von Theoremen, die zu den Problemkreisen des schwachen und des starken Gesetzes der großen Zahlen gehören, und zwar im Besonderen den zentralen Grenzwertsatz, den Satz vom iterierten Logarithmus und deren Erweiterungen.

S. Vajda (Epsom/England).

Kac, M.: On deviations between theoretical and empirical distributions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 35, 252—257 (1949).

Die Arbeit enthält eine Reihe von Sätzen, welche die Approximation einer Verteilungsfunktion durch die entsprechende empirische Verteilungsfunktion betreffen, wobei die Beweise nur angedeutet werden. Sei $\varepsilon(x)$ die charakteristische Funktion für das Intervall $0 \leq x < +\infty$, X_1, \dots, X_n eine Stichprobe aus einer gemäß $\sigma(u)$ verteilten Gesamtheit. Dann ist die empirische Verteilungsfunktion bezüglich (X_1, \dots, X_n) definiert gemäß $\sigma_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon(u - X_i)$. Nach Kolmogoroff (dies. Zbl. 6, 174) gilt

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} W \left\{ \sup_{-\infty < u < +\infty} |\sigma_n(u) - \sigma(u)| < \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \right\} = P(\alpha) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(2k+1)^2 \pi^2 / 8 \alpha^2}.$$

Verf. teilt mit, daß Doob (1) auf Grund der Theorie der Gaußschen stochastischen

Prozesse bewiesen und gezeigt hat, daß $P(\alpha) = W \left\{ \text{Max}_{0 \leq u \leq 1} |y(u)| < \alpha \right\}$, wobei der Gaußsche Prozeß $y(u)$ die Bedingungen $y(0) = y(1) = 0$, $E\{y(u)y(v)\} = \text{Min}(u, v) - uv$ erfüllt. — Verf. behandelt den theoretisch wie neuerdings auch praktisch bedeutsamen Fall, daß der Stichprobenumfang eine zufällige Variable N ist, welche nach Poisson mit Mittelwert μ unabhängig von den X_i verteilt ist. Für die empirische Verteilungsfunktion $\sigma_\mu(u) = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^N (u - X_j)$ erhält man dann ein analoges Ergebnis zu (1) in der Fassung von Doob:

$$(2) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} W \left\{ \sup_{-\infty < u < \infty} |\bar{\sigma}_\mu(u) - \sigma(u)| < \frac{\alpha}{\sqrt{\mu}} \right\} = \bar{P}(\alpha)$$

mit $P(\alpha) = W \left\{ \text{Max}_{0 \leq u \leq 1} |x(u)| < \alpha \right\}$, wobei $x(u)$ ($x(0) = 0$) den zuerst von Wiener beschriebenen Prozeß [vgl. N. Wiener, Generalized harmonic analysis, Acta math., Uppsala 55, 117—258 (1930)] bezeichnet. Der Beweis beruht wesentlich auf dem Nachweis, daß $x_\mu(u) = \sqrt{\mu} \{\bar{\sigma}_\mu(u) - u\}$, $0 \leq u \leq 1$ (man kann sich auf den Fall der Gleichverteilung beschränken), ein Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen ist [d. h. $x(b) - x(a)$ ist stochastisch unabhängig von $x(d) - x(c)$, wenn (a, b) und (c, d) fremd sind]. Der Satz folgt dann aus

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} W \left\{ \text{Max}_{1 \leq k \leq 2^r} \left| x_\mu \left(\frac{k}{2^r} \right) \right| < \alpha \right\} = W \left\{ \text{Max}_{0 \leq u \leq 1} |x(u)| < \alpha \right\}, E\{x(u)\} = 0, E\{x^2(u)\} = u.$$

Es ist interessant, daß H. Hurwitz jr. und M. Kac [Statistical analysis of certain types of random functions, Ann. math. Statist., Baltimore Md. 15, 173—181 (1944)] zeigen konnten, daß Poissonverteilung von N auch notwendig für unabhängige Zuwächse für den Prozeß $x_\mu(u)$ ist. — Verf. hat in einer früheren Arbeit (s. dies.

Zbl. 32, 35) die Verteilung von Funktionalen der Gestalt $\int_0^1 V(x(u)) du$, wobei die stetigen $x(u)$ dem Wienerschen Raum angehören (vgl. die oben zitierte Arbeit von Wiener) untersucht. Hier wird das Funktional

$$K_a = \int_{-\infty}^{+\infty} V_a(\sqrt{\mu}(\bar{\sigma}_\mu(u) - \sigma(u))) \cdot d\sigma(u) = \int_0^1 V_a(x_\mu(u)) du$$

mit $V_a(x) = 1 - \varepsilon(x - a)$ betrachtet, das geometrisch die „Überhöhung“ der Sprungfunktion $\bar{\sigma}_\mu(u)$ bezüglich $\sigma(u) + a/\sqrt{\mu}$ angibt. Es gilt dann

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} W\{K_a < \alpha\} = W \left\{ \int_0^1 V_a(x(u)) du < \alpha \right\},$$

wobei $\int_0^1 V_a(x(u)) du$ ein Wiener-Funktional bedeutet. Analoge Betrachtungen lassen sich auch für den Fall festen Stichprobenumfanges anstellen, doch tritt an Stelle des Wiener-Prozesses der Gaußsche Prozeß $y(u)$. Schmetterer (Wien).

Jaglom, A. M.: Zur Frage der linearen Interpolation stationärer zufälliger Folgen und Prozesse. Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 4 (32), 173—178 (1949) [Russisch].

Es bedeute $E(x)$ den Erwartungswert der zufälligen Veränderlichen x . Es sei $x(t)$ ein (komplexwertiger) stationärer zufälliger Prozeß (kurz s. z. P.) nach der Definition von A. Ja. Khintchine [s. z. B. Math. Ann., Berlin 109, 604—615 (1934); dies. Zbl. 8, 368], und wir nehmen an, daß $E(x(t)) = 0$. Es sei $B(u) = E(x(t+u)x(t))$ die Korrelationsfunktion von $x(t)$, die nach Definition nur von u abhängt. Wenn t nur ganze rationale Werte annimmt, so sprechen wir von einer stationären zufälligen Folge (kurz: s. z. F.). In beiden Fällen sei der Wertevorrat von t (d. h. für s. z. F. $-\infty < t < +\infty$, für s. z. F. $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) in zwei fremde Teilmengen K und K' gespalten. Es sei $s \in K'$, und man fragt nach der besten Approximation

(im Sinne des kleinsten Erwartungswertes der quadratischen Abweichung) von $x(s)$ mittels Summen der Form $L_n = \sum_{k=0}^n a_k x(t_k)$, wo die a_k beliebige komplexe Zahlen und die t_k zu K gehörende Zahlen bedeuten; mit anderen Worten, man sucht die untere Grenze $\sigma^2(s, K)$ von $E(|x(s) - L_n|^2)$. A. N. Kolmogoroff hat diese Frage für s. z. F. für den Fall gelöst, daß K aus allen ganzen Zahlen $< n$ oder aus allen ganzen Zahlen mit Ausnahme von n besteht [Izvestija Akad. Nauk. SSSR, Ser. mat. 5, 3—14 (1941)]. M. G. Krein hat die Frage für s. z. P. in dem Falle gelöst, daß K aus allen reellen Zahlen $t < t_0$ besteht. Verf. löst dieselbe Frage für s. z. P. für die folgenden Fälle: a) K besteht aus allen ganzen Zahlen; b) K' besteht aus endlich vielen Zahlen. Die Beweise stützen sich auf die Spektraldarstellung $B(u) = \int e^{iu\lambda} dF(\lambda)$ der Korrelationsfunktion und operieren im Hilbertschen Raum, der durch die Hülle der Summen $\sum_{k=0}^n a_k x(t_k)$ gebildet wird. A. Rényi (Budapest).

Statistik:

• Aitken, A. C.: Statistical mathematics. 6. ed., rev. Edinburgh and London: Oliver and Boyd. 1949. 153 p.

Das 1939 in erster Auflage erschienene Taschenbuch gibt einen allgemein guten, kurzen und doch umfassenden, einleitenden Überblick der mathematischen Statistik. Seine Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlegung ist allerdings unzulänglich. Die Einleitung gibt zwar eine treffende Kritik der klassischen sowie der Häufigkeitstheoretischen Definition der Wahrscheinlichkeit und deutet geschickt eine Maßtheoretische an. Die Ausführung, beschränkt sich aber — mit Rücksicht auf die elementare Einstellung — auf Merkmalsräume mit endlich vielen Elementen. Ohne Beachtung des diskontinuierlich unendlichen Falles wird so der — ohne Vorbereitung hingestellte — kontinuierliche als ständiger Fremdkörper mitgeschleppt. Sieht man von den unausbleiblichen Folgen dieser Erbsünde ab, so findet man im weiteren einen flotten Aufbau in zeitgemäßer Darstellung. Die verschiedenen Verteilungsparameter, die grundlegenden Verteilungen sowie ihre durch Differenzen- bzw. Differentialgleichungen bestimmten Typen. Die Herstellung von Näherungsverteilungen stützt sich auf die Addition von gleichverteilten unabhängigen Zufallsveränderlichen und betont so richtigerweise die Größenordnung der Entwicklungskoeffizienten bezüglich des Additionsparameters, d. h. den asymptotischen Charakter der Reihenentwicklungen nach Derivierten bzw. Differenzen der normalen bzw. Poissonschen Verteilungsfunktionen (Typ A bzw. B). Trotzdem findet man im anschließenden Kapitel über die Anpassung an empirische Verteilungen neben der Charlierschen Reihe vom Typ B statt der Edgeworthschen die Brunssche, d. h. Charliersche vom Typ A behandelt. Zwei Kapitel sind der Korrelations- und einer ziemlich umfassenden Regressionstheorie mehrdimensionaler Verteilungen gewidmet. Die Erwähnung der absoluten Regressionsfunktionen würde hier klärend wirken. Die Vorwegnahme der χ^2 -Methode ist aber hier bestimmt störend. Sie gehört in das an- und abschließende Kapitel über die Verteilungen der Stichprobenparameter bei einer normalen Gesamtheit. Dieses Kapitel behandelt unmittelbar die Helmer-Pearsonsche, Studentsche, Snedecorsche und Fishersche Verteilung und gibt einen Einblick in die — geschickt früher vorbereitete — Streuungserlegung von R. A. Fisher. Die Beweise stützen sich durchwegs auf die Wahrscheinlichkeiten sowie faktorielle bzw. Potenzmomente und Kumulanten erzeugende Funktionen. Sie sind größtenteils nur skizziert und vielerorts formal. Zu ihrer Ergänzung sollte nunmehr an Stelle von Cramérs Cambridge Tract auf sein Lehrbuch hingewiesen werden. Viele geschickte kleine und ausgeführte längere Zahlenbeispiele sowie Übungsaufgaben beleben die — wie die Auflagenzahl zeigt, beliebte — Darstellung. Szentmártony (Budapest).

Cansado Maceda, E.: Charakteristische Funktionen der Pearsonschen Verteilungen. I. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 7, 117—127 (1947) [Spanisch].

Nach einer elementaren Einleitung wird die charakteristische Funktion der Pearsonschen Type I-Verteilung abgeleitet. Die charakteristischen Funktionen der Typen II, III, VIII, IX und XII sowie der Gaußschen und der Gleichverteilung ergeben sich durch Spezialisierung und durch Grenzwertbetrachtungen. Die noch übrigen Typen werden in einem zweiten Teil der Arbeit behandelt werden. — Während sich für die Gaußsche Verteilung, die Gleichverteilung und für Type III elementare Funktionen ergeben, muß für Type II die Zylinderfunktion und für die anderen Typen die hypergeometrische Funktion herangezogen werden. Vajda.

Thawani, V. D.: A note on a property of the median. *Math. Student, Madras* 16, 35—36 (1949).

Verf. gibt einen auf den Eigenschaften der Stieltjes-Integrale beruhenden Beweis des bekannten Satzes, daß die durchschnittliche Abweichung für eine Verteilung am kleinsten wird, wenn sie vom Median aus berechnet wird, der, ohne die Existenz der Häufigkeitsfunktion vorauszusetzen, in gleicher Weise für kontinuierliche und diskontinuierliche Verteilungen gilt. *Georg Friede (Göttingen).*

Shone, K. J.: Relations between the standard deviation and the distribution of range in non-normal populations. *J. R. statist. Soc., Ser. B, London* 11, 85—88 (1949).

Ist σ_p^2 die Varianz eines beliebig verteilten Kollektivs, \bar{r} und σ_r^2 Erwartungswert und Varianz der Variationsbreite r einer zweigliedrigen Stichprobe, so besteht zwischen ihnen bekanntlich die Relation $2\sigma_p^2 = \bar{r}^2 + \sigma_r^2$. Verf. liest aus numerischen Beispielen analoge Relationen der Form $\bar{r}/\sigma_p = a - b \cdot \sigma_r/r$ ab mit $a = 2,10$, $b = 0,81$ für 3-gliedrige Stichproben, $a = 2,29$, $b = 0,69$ für 4-gliedrige Stichproben, $a = 2,41$, $b = 0,46$ für 5-gliedrige Stichproben. Die mathematische Deduktion der Behauptung steht noch aus. *M. P. Geppert (Bad Nauheim).*

Gumbel, E. J.: Probability tables for the range. *Biometrika, Cambridge* 36, 142—148 (1949).

Verf. vergleicht seine eigenen Formeln (s. dies. Zbl. 32, 37) für die asymptotische Verteilung der Variationsbreite einer symmetrischen Verteilung von exponentiellem Typus mit denen, die Elfving ungefähr gleichzeitig gefunden hat (dies. Zbl. 30, 168). Die Resultate sind äquivalent, doch führt Verf. zugunsten seiner eigenen Lösung an, daß sie nicht die Kenntnis der ursprünglichen Gesamtheit erfordert. Sie ist auch von der Anzahl in der Stichprobe unabhängig, doch scheint dies dem Ref. kein entschiedener Vorteil zu sein, wenn die Formeln zur Beurteilung einer beobachteten Verteilung der Variationsbreite verwendet werden, da ja dann der Stichprobenumfang wohl immer bekannt ist. Die Arbeit enthält eine Tabelle der asymptotischen Verteilung der reduzierten Variationsbreite. *S. Vajda (Epsom/Engl.).*

Sinha, Gurudas: A note on the expression for the sample estimate of the coefficient of partial correlation. *Bull. Calcutta math. Soc.* 41, 159—161 (1949).

Wird aus einer Gesamtheit mit k Merkmalsvariablen x_1, x_2, \dots, x_k eine Zufallsstichprobe $(x_{1l}, x_{2l}, \dots, x_{kl})$, $l = 1, 2, \dots, n$, vom Umfang n entnommen, so ergibt sich aus ihr der Schätzwert für den totalen Korrelationskoeffizienten r_{ij} zwischen x_i und x_j nach der bekannten Formel $r_{ij} = p_{ij}/\sqrt{p_{ii}p_{jj}}$, in der p_{ij} das Produktmoment $\left[p_{ij} = \sum_{l=1}^n (x_{il} - x_i)(x_{jl} - x_j) \right]$ ist. Verf. zeigt, daß sich auch der partielle Korrelationskoeffizient für diese Stichprobe $r_{12 \dots k}$ zwischen x_1 und x_2 in entsprechender, für die Berechnung etwas bequemerer Form durch die p_{ij} bzw. die r_{ij} darstellen läßt. Ist P_{ij} die Minore von p_{ij} in der Determinante $\Delta = ||p_{ij}||$ und λ_{ij} die Minore von r_{ij} in der Determinante $\lambda = ||r_{ij}||$, so gilt $r_{12 \dots k} = P_{12}/\sqrt{P_{11}P_{22}} = \lambda_{12}/\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22}}$. Ferner gilt, wie ebenfalls gezeigt wird, für den multiplen Korrelationskoeffizienten neben der bekannten Formel $R_{1.2 \dots (i-1)(i+1) \dots k} = \sqrt{1 - \Delta/p_{ii}P_{ii}}$ auch $R_{1.2 \dots k} = \sqrt{1 - \lambda/r_{11}\lambda_{11}} = \sqrt{1 - \lambda/\lambda_{11}}$, da $r_{ii} = 1$ ist. *Georg Friede (Göttingen).*

Hasnain Jaffri, S. M.: Note on „Calculation of cumulants“. *Math. Student, Madras* 16, 37—38 (1949).

Verf. gewinnt aus dem totalen Differential des r -ten auf einen beliebigen Anfangspunkt bezogenen Momentes μ'_r nach den r Kumulanten k_1, \dots, k_r und der bekannten Beziehung $\frac{\partial \mu_r}{\partial k_j} = \binom{r}{j} \mu'_{r-j}$ für μ'_r die Differentialgleichung

$d\mu'_r = dk_r + \binom{r}{1} \mu'_1 dk_{r-1} + \binom{r}{2} \mu'_2 dk_{r-2} + \dots + \binom{r}{r-1} \mu'_{r-1} dk_1$ und eine entsprechende Darstellung der r -ten Kumulante k_r durch die Momente μ'_r , $r = 1, 2, \dots, k$.

Georg Friede (Göttingen).

Cansado Maceda, E.: Kumulanten des Fisherschen z . Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 7, 87—89 (1947) [Spanisch].

Die Arbeit enthält eine neue Ableitung von Formeln für die Kumulanten der Fisherschen z -Verteilung, mit den Freiheitsgraden ν_1 und ν_2 . Verf. erhält

$$k_1 = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\nu_2}{\nu_1} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu_1 - \nu_2}{(\nu_1 + 2n)(\nu_2 + 2n)}$$

und eine Formel für k_m ($m = 2, 3, \dots$). (In der Arbeit ist k_m irrtümlich durch k_2 ersetzt worden.) — Formeln für die Kumulanten sind schon von früher her bekannt, z. B. hat Wishart (dies. Zbl. 29, 373) die Kumulanten der logarithmischen χ^2 -Verteilung, der z -Verteilung und der logarithmischen t -Verteilung berechnet. Ein Vergleich der vom Verf. für k_1 angegebenen mit der äquivalenten Wishartschen Formel ergibt einen (vielleicht neuen) Zusammenhang zwischen der allgemeinen hypergeometrischen und der Digammafunktion.

S. Vajda (Epsom/England).

Brownlee, K. A., B. K. Kelly and P. K. Loraine: Fractional replication arrangements for factorial experiments with factors at two levels. Biometrika, Cambridge 35, 268—276 (1948).

Finney's „fractional replication“ (teilweise Wiederholung) beruht auf folgendem Gedanken [Ann. Eugenics, London 12, 291—301 (1945)]: Man betrachte zwei isomorphe Gruppen G_1 und G_2 , z^p mit den Elementen $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ und $y_1^{b_1} y_2^{b_2} \dots y_n^{b_n}$ ($a_1, \dots, b_n = 0, 1, \dots, p-1$). Es sei $x_i^p = y_i^p = 1$ für alle i , so daß beide Gruppen von der Ordnung p^n sind, wobei p eine Primzahl ist. Ein Element aus G_1 und eines aus G_2 sind orthogonal, wenn $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \equiv 0 \pmod{p}$. Wir fassen ein Element aus G_1 als ein Symbol auf für eine Kombination von n Faktoren x_1, \dots, x_n mit Niveaus a_1, \dots, a_n und ein Element aus G_2 als Symbol für einen Freiheitsgrad einer Interaktion derjenigen Faktoren, für die $b_i \neq 0$ (so daß z. B. $y_1, y_2^2, \dots, y_1^{p-1}$ die $p-1$ Freiheitsgrade zur Untersuchung des Effekts von x_1 bedeuten). Wenn nicht alle p^n möglichen Faktorkombinationen in einem Experiment untergebracht werden können, dann schlägt Finney vor, nur diejenigen zu verwenden, die durch Elemente einer Untergruppe S_1 von G_1 dargestellt werden. S_2 , die „vollständige orthogonale Untergruppe von S_1 “, ist diejenige Untergruppe aus G_2 , die aus den Elementen besteht, welche zu allen Elementen von S_1 orthogonal sind. Es zeigt sich dann, daß der Test für irgendeinen Freiheitsgrad Y mit demjenigen von Y' identisch ist, wobei Y' ein beliebiges Element von S_2 ist. $Y Y'$ wird als ein Alias von Y bezeichnet und S_2 , auch als „Alias-Untergruppe“ bezeichnet, besteht aus allen Aliases des Einheitselementes $y_1^0 y_2^0 \dots y_n^0$. — Man versucht, nur solche Experimente durchzuführen, in denen ein Freiheitsgrad eines Effektes oder einer Interaktion, der von Interesse ist, nur Aliase hat, die als unwichtig betrachtet werden können, so daß der Umstand, daß man eigentlich gleichzeitig mehrere Wirkungen untersucht, keinen wesentlichen Nachteil bedeutet. (Diese Einleitung scheint zum Verständnis der zu besprechenden Arbeit unentbehrlich zu sein; die Bezeichnungsweise ist die des Ref.)

Verff. konstruieren Tests, in denen $p = 2$ ist und kein Haupteffekt oder Interaktion erster Ordnung als Alias eine Interaktion von niedrigerer als zweiter Ordnung hat. Daher hat jedes Element der Aliasuntergruppe, vom Einheitsselement abgesehen, mindestens fünf Werte y_i , für die $b_i \neq 0$ ist. Die Arbeit beschreibt eine Methode zur Abzählung aller solchen Systeme und verwendet sie zur Konstruktion von Untergruppen S_1 der Ordnungen 2^4 , 2^5 und 2^6 für geeignet gewählte Werte von n . Es werden auch Aussagen über größere Untergruppen gemacht und Experimente erwähnt, in denen ein oder zwei Faktoren vier verschiedene Niveaus haben.

S. Vajda (Epsom/England).

Brownlee, K. A. and P. K. Loraine: The relationship between finite groups and completely orthogonal squares, cubes, and hyper-cubes. Biometrika, Cambridge 35, 277—282 (1948).

Ein vollständiger orthogonaler Hyperwürfel mit Seitenlänge π (Primzahl) und Dimension n ist definiert durch die Abelsche Gruppe, die durch folgende Elemente

erzeugt wird: $x_i a b^{1+(i-1)} c^{1+2(i-1)} \dots w^{1+(\pi-2)(i-1)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Die Anzahl der Buchstaben a, b, \dots, w ist $\pi - 1$ und die Exponenten sind mod π zu nehmen. Man denke etwa, für $n = 2$, an Ausdrücke $(x_1 a b \cdot w)^{y_1} (x_2 a b^2 c^3 \dots w^{\pi-1})^{y_2}$, in denen y_1 und y_2 die Koordinaten der π^2 Zellen eines Quadrates sind und die Exponenten von a, b, \dots, w die Niveaus der $\pi - 1$ Faktoren bedeuten, die in den entsprechenden Zellen untergebracht werden. Für praktische Anwendungen können x_1, x_2, \dots ebenfalls als Bezeichnungen für Faktoren gelten, und man hat es dann insgesamt mit $\pi + 1$ Faktoren zu tun. Diese Zahl bleibt auch für $n = 2$ richtig, wenn die Regel befolgt wird, daß ein Buchstabe, der in einer der Erzeugenden mit einem Exponenten $\equiv 0 \pmod{\pi}$ auftritt, aus allen Erzeugenden ausgelassen wird. Die einleitend definierte Abelsche Gruppe hat die Ordnung π^n , so daß ihre Alias-Untergruppe (s. vorsteh. Referat) die Ordnung π^{n+1-n} hat. Verff. beweisen u. a. den folgenden allgemeinen Satz: Die Haupteffekte der Faktoren, die durch a, b, \dots, w dargestellt werden, haben unter ihren Aliassen Interaktionen erster Ordnung. Die durch x_1, \dots dargestellten dagegen haben als Aliase Interaktionen der Ordnung $n - 1$.

S. Vajda (Epsom/England).

Godwin, H. J.: On the estimation of dispersion by linear systematic statistics. *Biometrika*, Cambridge **36**, 92—100 (1949).

Die Arbeit befaßt sich mit einer Diskussion der „Wirksamkeit“ (efficiency) von Schätzungen der Streuung innerhalb einer Population, die dadurch erhalten wird, daß man die Beobachtungen einer Stichprobe nach der Größe ordnet und eine Linearkombination von ihnen ins Auge faßt. Verf. bringt die Entwicklungen unter Hinweis auf entsprechende Vorarbeiten anderer Autoren (Pearson, Tippett, Mosteller u. a.); seine Methode fußt auf einer Betrachtung der ersten und zweiten Momente der Differenzen konsekutiver Rangordnungen. Die Herleitung spezieller Ergebnisse wird für die Rechtecks- und für die Normalverteilung durchgeführt. In einem besonderen Abschnitt der Arbeit wird auch die Frage nach der „wirksamsten“ Linearverbindung beantwortet.

G. Wünsche (München).

Spáček, Antonín: Note on successive cumulative sums of independent random variables. *Časopis Mat. Fysiky*, Praha **74**, 41—45 und tschechische Zusammenfassg. 45 (1949).

Verf. behandelt die folgende Verallgemeinerung eines Folgetests: z_1, z_2, \dots sei eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsveränderlichen mit endlicher Streuung. Wir bezeichnen $z_1 + \dots + z_m$ mit Z_m und wählen drei Größen $b < 0 < a$, $d \neq 0$. n sei eine Zufallsveränderliche, definiert als der kleinste Wert von m , für den weder Z_m noch $Z_m + md$ in das Intervall (b, a) fällt. (In der Anwendung dieses Planes, an die Verf. denkt, wird eine Hypothese angenommen, wenn $a - nd \leq Z_n \leq b$, und sonst abgelehnt.) Es wird gezeigt, daß die folgenden Waldschen Theoreme auch für diesen Fall gelten: 1. Alle Momente der Verteilung von n sind endlich. 2. Wenn $q(t)$ existiert und $|q(t)| \geq 1$, dann gilt $E[e^{Znt} q(t)^{-n}] = 1$, wobei $E[\]$ einen Erwartungswert bezeichnet und $q(t) = E[e^{zt}]$. 3. Man kann die in 2. angegebene Gleichung unter dem Operator E bezüglich t differenzieren. (Dies ist von Bedeutung, weil man durch Differenzieren und Nullsetzen von t den Wert $E[n]$ leicht berechnen kann.) Der Beweis wird mit Hilfe der folgenden Sätze geführt: a) Es gibt zwei Zahlen $c > 0$ und $0 < p < 1$, so daß $P(n > k) < cp^k$ für alle ganzen k . b) Der bedingte Erwartungswert $E[e^{Znt} | n = m]$ hat für jedes reelle t eine obere, von m unabhängige, Schranke.

S. Vajda (Epsom/Engl.).

Samuelson, Paul A.: Exact distribution of continuous variables in sequential analysis. *Econometrica*, Chicago **16**, 191—198 (1948).

In einem Folgetest werden die Größen Z schrittweise berechnet und der Test wird abgeschlossen mit der Annahme der Hypothese H_b , wenn $Z > a$, und mit der Annahme von H_a , wenn $Z < b$. Wenn dagegen $b \leq Z \leq a$, wird eine neue Beobachtung gemacht. Wir bezeichnen mit $F_n(Z)$ die Verteilungsfunktion von Z nach

n Schritten, unter der Annahme, daß der Test nicht vorher abgeschlossen wurde. Es gilt

$$F_n(Z) = \int_b^a F_1(Z-s) F_{n-1}(s) ds.$$

Verf. führt die Größe $g(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(Z)$ ein und beweist die Beziehung $g(Z) = F_1(Z) + \int_b^a F_1(Z-s) g(s) ds$. Dann gelten die folgenden Sätze: a) $\int_a^{\infty} g(Z) dZ$ ist die Potenzfunktion (power function). b) Der Erwartungswert der Anzahl n der Beobachtungen vor dem Ende des Tests ist $\int_{-\infty}^{\infty} g(Z) dZ = 1 + \int_b^a g(Z) dZ$. Ferner zeigt Verf., daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung von n durch $P_n = G^{(n)}(0)/n!$ gegeben ist, wobei $G(\lambda)$, die „erzeugende“ Funktion, $= \int_{-\infty}^b g(Z, \lambda) dZ + \int_a^{\infty} g(Z, \lambda) dZ$ ist und $g(Z, \lambda) = \lambda f(Z) + \lambda \int_b^a F(Z-s) g(s, \lambda) ds$. S. Vajda (Epsom/England).

● Hald, A.: The decomposition of a series of observations, composed of a trend, a periodic movement and a stochastic variable. Copenhagen: G. E. C. Gads Forlag, 1948. 134 p.

Die als Dissertation angenommene Arbeit behandelt die klassische Frage der Zerlegung einer Beobachtungsfolge in einen zügigen (I_i), einen periodischen (η_i) und einen zufälligen (ε_i) Bestandteil unter folgenden Bedingungen. 1. Die I_i stimmen an den äquidistanten Beobachtungsstellen x_i mit den Werten eines Polynoms $\Gamma(x)$ überein, dessen Ordnung gleichzeitig zu bestimmen ist. 2. Die Periode k von (η_i) ist bekannt. 3. Die ε_i sind Werte solcher unabhängigen Zufallsveränderlichen, die sich um den Mittelwert Null mit derselben Streuung σ verteilen. Bei Aufteilung der x_i in n Gruppen von k Elementen und bei der Darstellung von

$$\Gamma(x) = \gamma_0 + \gamma_1 \xi_1(x) + \dots + \gamma_l \xi_l(x)$$

durch Polynome $\xi_r(x)$ von r -ter Ordnung hat die Frage früher Neyman behandelt. Und zwar mit Schätzung der Parameter γ_r , η_i , σ sowie Bestimmung ihrer Verteilungen und somit Angabe von Entscheidungskriterien bei Prüfung bestimmter Annahmen bezüglich der Parameter. Verf. vereinfacht nun wesentlich die entsprechende Rechnungstechnik durch Heranziehung von geeigneten orthonormierten Polynomen $\xi_r(x)$, die für $k=1$ in die gewöhnlich gebrauchten Tschebyscheffschen übergehen. Bei der Ordnungszahl 1—6 werden Gleichungen für die Koeffizienten und für mehrere Paare (n, k) sogar die Werte der Polynome angegeben. Neben dieser regressionsanalytischen Methode streift ein kurzer Abschnitt jene der Streuungszерlegung im Falle eines treppenförmigen Trends. Die bei stückweise linearer zügiger Kurve gebrauchte Methode der beweglichen Durchschnitte wird dann, auf die Arbeiten von Linhard, Johansen und Kristensen gestützt, umfassend behandelt. Die Anwendungen der besprochenen Methoden auf landwirtschaftliche Versuche und auf ein Beispiel aus der Wollenindustrie sowie auf die Zerlegung einer wirtschaftlichen Folge beschließen die Dissertation. Szentmártony (Budapest).

Quenouille, M. H.: On a method of trend elimination. Biometrika, Cambridge 36, 75—91 (1949).

Mit der von ihm entwickelten Methode, die als Kompromiß zwischen dem Verfahren der Kurvenanpassung und dem der gleitenden Durchschnitte angesehen werden kann, liefert Verf. einen wertvollen Beitrag zu dem in der Literatur schon oft behandelten Problem der Trendbereinigung. Die Arbeit bringt eine Betrachtung der Zusammenhänge und die Auswertung der zahlenmäßigen Veranschaulichungsbeispiele unter Anschluß an die neuesten Ergebnisse aus der Theorie und Praxis der Kovarianz-Analyse. G. Wünsche (München).

Biomathematik. Finanzmathematik:

● **Rashevsky, N.: Mathematical theory of human relations. An approach to a mathematical biology of social phenomena.** (Mathematical Biophysics Monograph Series, Nr. 2). Bloomington, Indiana: Principia Press, 1947. XIV, 202 p. \$ 4.00.

Mit dem vorliegenden Buch unternimmt der von seinen Erfolgen auf dem Gebiete der mathematischen Biophysik her bekannte Autor den Versuch, eine geschlossene mathematische Theorie der menschlichen Beziehungen zu entwickeln. Die Berechtigung hierzu liegt einerseits in der Interpretation der Soziologie als biologischer Wissenschaft und in dem glänzenden Erfolg, der in der Biologie, trotz anfänglichen Widerstandes der Biologen, der mathematischen Behandlung der Lebensgemeinschaften, Konkurrenz der Arten usw. beschieden war, andererseits in der nicht zu leugnenden Tatsache, daß die empirische Soziologie und Wirtschaftswissenschaft auf statistischem Wege eine Reihe von quantitativen Gesetzmäßigkeiten zwischen beobachtbaren oder sogar meßbaren sozialen und ökonomischen Faktoren erschlossen haben, die zu einer mathematischen Deduktion aus plausiblen elementaren Voraussetzungen drängen. Obwohl diese Theorie sich bereits auf eine Reihe früherer Arbeiten des Verf. und anderer Autoren stützt, bleibt sie naturgemäß stellenweise noch sehr skizzenhaft, unvollständig, wofür sie aber durch eine Fülle von Anregungen und Ausblicken auf künftigen Ausbau und Weiterentwicklung der Theorie reichlich entschädigt. An den Anfang stellt Verf. allgemeine mathematische Betrachtungen über einige soziale Erscheinungen: Verteilung von Aktivitäten, Bildung sozialer Gruppen, räumliche Verteilung der Individuen, Auftreten von Instabilitäten einer Gesellschaft. Solange hierbei Aktivitäten, Beeinflussungen, Nachahmung usw. als in der Bevölkerung kontinuierlich verteilte Variablen betrachtet werden, ergeben sich komplizierte, i. a. schwer lösbare Integralgleichungen. Vereinfacht man hingegen den Ansatz, indem man die kontinuierlich verteilte Bevölkerung durch diskrete soziale Gruppen ersetzt, in denen die betr. Variable konstant (und zwar gleich ihrem dortigen Mittelwert) ist, so treten an Stelle der Integralgleichungen Systeme von Differentialgleichungen auf, deren Lösungen zwar großenteils nicht explizite angegeben, aber eingehend analytisch diskutiert werden. Die Betrachtungsweise ähnelt damit in gewissem Sinne derjenigen der oben erwähnten mathematischen Theorie (Volterra, Lotka usw.) der biologischen Soziologie; rein deterministisch, mit Mittelwerten operierend, ist sie zumindest als erste Näherung an eine der Wirklichkeit gemäße stochastische Theorie der sozialen Phänomene zu akzeptieren. Eine direkte Nachprüfung der Resultate an Hand statistischer Daten ist meist grundsätzlich nicht möglich, da die vom Autor benutzten Variablen häufig psychologischer Natur, jedenfalls aber nicht unmittelbar meßbar sind. Immerhin leitet Verf. aus seinen Resultaten einige Relationen ab, die er an soziologischem Zahlenmaterial wenigstens illustrieren kann: z. B. die Beziehung zwischen durchschnittlicher Produktion, Bevölkerungsdichte und Anteil der arbeitenden Bevölkerung, zwischen Land- und Stadtbevölkerung unter verschiedenen Voraussetzungen, zwischen Bevölkerung von Städten und deren Größenrang, zwischen durchschnittlicher Produktion und militärischem Etat im Frieden, Anzahl der Erfindungen, u. a. m. Behandelt werden Wechselwirkungen zwischen zwei oder drei sozialen Gruppen verschiedener Aktivität, räumliche Verteilung der Individuen und Verteilung der Städtegrößen, soziale Struktur und deren Wandlungen, individualistische und kollektivistische Gesellschaft, Krieg. Natürlich hängen die Ergebnisse, wie Verf. selbst betont, wesentlich von den schematischen, teilweise bewußt primitiven Ausgangsvoraussetzungen ab und können daher keine absolute Gültigkeit beanspruchen; sie sind zum Teil nur als Hinweise auf die grundsätzliche Mathematisierbarkeit der Soziologie aufzufassen.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Patinkin, Don: The indeterminacy of absolute prices in classical economic theory. *Econometrica*, Chicago 17, 1–27 (1949).

Nach der klassischen Nationalökonomie (System von Cassel) sind die Nachfrage- und Angebotsfunktionen $D_i(p_1, p_2, \dots, p_n)$ und $S_i(p_1, p_2, \dots, p_n)$ für jedes Gut i , $i = 1, \dots, n$, dessen Preis p_i ist, homogen vom Grade 0 in den p_i ; d. h. eine proportionale Änderung der Preise p_i berührt das System, den Warenausgang der Wirtschaft, nicht. Verf. zeigt mit der Substitution $\lambda = 1 : x_j$, $j \leq k$, daß, wenn $f(x_1, \dots, x_n)$ in x_1, \dots, x_k ($k \leq n$) homogen vom Grade 0 ist, in $f = 0$ neben den x_i , $i > k$, nur noch die Verhältnisse $x_i : x_j$, $i \leq k$, vorkommen, wegen $x_j : x_j = 1$ also nur noch $n - 1$ Variable. Damit beweist er: Ein System von n unabhängigen Gleichungen in n Veränderlichen, die alle in denselben k Variablen, $k \leq n$, homogen sind, ist inkonsistent, es sei denn es habe die Lösung $x_i = 0$ für alle $i \leq k$. — Die n Nachfrageexzeßgleichungen (kurz „Gleichungen“) $D_i - S_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, sind homogen in den p_i , das Casselsche System also inkonsistent, ebenso das abgeänderte System von Lange. Das Gesetz von Say reduziert die „Gleichungen“

um eine; damit wird die Inkonsistenz behoben; gleichzeitig ist das System aber nicht mehr nach den Preisen p_i , sondern allenfalls noch nach den Preisverhältnissen auflösbar. Keine Geldgleichung kann die Unbestimmtheit der absoluten Preise beseitigen, denn sie müßte, wie Verf. zeigt, wegen der Homogenität der Gütergleichungen ebenfalls homogen sein, also auch nur eine Gleichung von relativen Preisen. Die klassische Theorie wird gerettet, wenn das absolute Preisniveau von vornherein in jede „Gleichung“ eingeht, d. h. auf Kosten der Homogenität des ganzen Systems (vereinfachte Darstellung).
Härlen (München).

Frisch, Ragnar: On the zeros of homogeneous functions. *Econometrica*, Chicago 17, 28—29 (1949).

Der Satz von Patinkin [s. vorsteh. Referat] über „homogene“ Funktionen gilt nicht, wenn die Funktionen identisch 0 sind oder wenn eine Lösung existiert, bei der alle Variablen, in denen die Funktionen homogen sind, verschwinden. Das zeigt Verf. an den homogenen Funktionen mit einer Variablen, $f(\lambda x) = \lambda^t f(x)$ für alle reellen λ und x , durch reell-funktionentheoretische Überlegungen. Volkswirtschaftlich sind die Möglichkeiten, daß die Nachfrage- und die Angebotsfunktionen identisch verschwinden oder daß die Preise 0 sind, bedeutungslos.

Härlen (München).

Geometrie.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

• **Fano, G. ed A. Terracini:** *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*. 2. ed. Torino: Paravia 1948. VIII, 642 p.

• **Robinson, R.:** *Analytic geometry*. New York: McGraw-Hill Book Co. 1949. X, 147 p. \$ 2,25.

Das Buch behandelt in sehr elementarer und leicht faßlicher Form die einfachsten Dinge der Analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes in Cartesischen Koordinaten etwa in dem Umfange, wie dies an Mittelschulen geschieht. Die Darstellung ist für Anfänger und zum Selbststudium sehr geeignet, was besonders durch die zahlreichen Übungsaufgaben (deren Lösungen in einem Anhang gegeben werden) zum Ausdruck kommt. Weitzenböck (Overveen).

Flanders, Donald A.: *Angles between flat subspaces of a real n -dimensional Euclidean space*. *Studies Essays*, pres. to R. Courant, 129—138 (1948).

Seit den ersten Untersuchungen über die metrischen Verhältnisse in mehrdimensionalen Räumen im vergangenen Jahrhundert weiß man, daß sich zwischen 2 linearen Räumen, von einfacheren Fällen abgesehen, mehrere ausgezeichnete Winkel erklären lassen. Verf. gelangt zu diesem Ergebnis in modernerer Behandlung mit Hilfe der Matrizen Schreibweise; die Gleichung eines linearen E_p des E_n schreibt er in der Parameterform $x = a + A t$, wo A eine Matrix von p Spalten und n Zeilen und t der bis auf affine Abänderungen festgelegte Parametervektor von p Spalten ist. Hiermit wird dann Parallelität und Orthogonalität zwischen 2 Räumen erklärt und zunächst der \cos des Winkels zwischen einer Geraden E_1 und einem beliebigen E_p . Dieser Winkel ergibt sich als bewegungsinvariant und invariant gegen Abänderung der affinen Bezugssysteme je in E_1 und E_p und ist ferner der kleinste von allen zwischen E_1 und irgendeiner Geraden in E_p zu definierenden Winkel. Dies hängt mit dem Eigenwertproblem einer bestimmten Matrix zusammen und führt in dieser Auffassung unmittelbar zu den ausgezeichneten Winkeln zwischen einem E_p und E_q .
Bureau (Hamburg).

Aude, H. T. R.: *Notes on quartic curves*. *Amer. math. Monthly* 56, 165—170 (1949).

In dieser Arbeit werden mit ganz elementaren Mitteln einige gestaltliche Eigenschaften der Kurven $y = x^4 + p x^2 + q x + 0$ (1) hergeleitet (das Glied mit x^3 ist bereits beseitigt). Zunächst ist leicht zu sehen, daß die Schnittpunkte der Kurve (1) mit der Parallelschar $y = q x + C$ (2) symmetrisch zur y -Achse liegen. Bei $p < 0$

besitzt (1) ferner 2 reelle Wendepunkte, deren Verbindungsgerade zur Schar (2) gehört, und bei $p < -3 \cdot 2^{2/3}/2$ hat (1) drei Hoch- und Tiefpunkte. Im letztgenannten Fall ist dann noch von Interesse je eine einfach und eine doppelt berührende Tangente der Schar (2). Alles dies wird einzeln ausgerechnet und zur gestaltlichen Diskussion der Kurven der Schar (1) verwendet. *Bureau (Hamburg).*

Koschmieder, Lothar: Äußerstwerte an Laméschen Kurven und Flächen. *Gac. mat., Madrid*, 1. Ser. **1**, 53—59 (1949).

Verf. bestimmt mit elementaren Hilfsmitteln das Maximum des Inhaltsmaßes eines achsenparallelen, in die Lamésche Kurve (Hyperfläche)

$$\frac{x_1^\mu}{a_1} + \frac{x_2^\mu}{a_2} \left(+ \cdots + \frac{x_n^\mu}{a_n} \right) = 1 \quad \left(\mu = \frac{2v}{2\lambda + 1}, \lambda, v \text{ nichtnegativ, ganz} \right)$$

eingeschriebenen Rechtecks (Parallelotops). Das Maximum wird erreicht für $x_k = \pm a_k n^{-1/\mu}$ und hat den Wert $2^n \cdot n^{-n/\mu} \cdot \prod a_k$. Die Laméschen Kurven werden weiterhin mit einer isoperimetrischen Aufgabe der Humbertschen Geometrie (mit dem Bogenelement $ds^N = dx^N + dy^N$, $N \geq 2$ ganz) in Zusammenhang gebracht. Die Arbeit ist durch eine Unmenge von Druckfehlern entstellt, deren Liste hier nicht wiedergegeben werden kann. (Anmerkung der Redaktion: Verf. hatte aus postalischen Gründen keine Möglichkeit, eine Korrektur seiner Arbeit zu lesen.) *Egerváry.*

Ambasankar, J. A.: Grassmann cubic and Wallace lines. *Math. Student, Madras* **16**, 8—17 (1949).

Sind ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke derselben Ebene, verbindet man einen Punkt P dieser Ebene mit A' , B' , C' und schneidet PA' mit der Seite BC , PB' mit CA und PC' mit AC , so erhält man drei Punkte P_1, P_2, P_3 . Diese liegen auf einer Geraden l , wenn P auf der Graßmannschen Kurve dritter Ordnung C_3 gelegen ist, die durch die beiden Dreiecke bestimmt wird. Der Ort der Geraden l ist dann die Graßmannsche Kurve dritter Klasse K_3 . Die auf dieser Figur beruhende Graßmannsche Erzeugung der ebenen Kurven 3. Ordnung (und Klasse) sowie zahlreiche, sich hieran knüpfende Fragen, sind von Clebsch [*Math. Ann.*, Berlin **5**, 422—427 (1872)], Hesse [*J. reine angew. Math.* **36**, 152 (1848)] und anderen behandelt. Verf. beweist analytisch einige Sätze, die sich bei spezieller Wahl der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ergeben; so, wenn z. B. die Punkte $A'B'C'$ auf einer Geraden liegen oder die drei Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ durch denselben Punkt gehen. *Weitzenböck.*

● **Lietzmann, Walter:** Elementare Kegelschnittlehre. Eine Einführung in die Methoden der Geometrie. Bonn: Ferd. Dümmlers Verlag 1949. 171 S., 104 Abb. n. 7 Tafeln, br. DM 11,80.

Zusammenfassende Darstellung der elementaren Kegelschnitteigenschaften und methodische Ableitung verschiedener (auf reelle Elemente beschränkter) Konstruktionen auf Grund planimetrischer und stereometrischer bzw. affiner, perspektiver und projektiver Definitionen der Kurven. — Gruppentheoretische Betrachtungen und Klassifikation der Kurven und Flächen zweiten Grades nach ihrer analytischen Darstellung usw. *H. Horninger (Graz).*

Krishnaswami Ayyangar, A. A.: On tracing central conics. *Math. Gaz., London* **33**, 38—41 (1949).

Verf. gibt ein einfaches graphisches Verfahren zur Bestimmung der Achsen und Asymptoten des Mittelpunktskegelschnitts $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ an. Man bestimme die Punkte $P(0, a)$ und $Q(-2h, a - b)$, die Parallele PP' zur x -Achse und den Kreis über dem Durchmesser OQ (O der Ursprung). Im Fall der Ellipse schneidet PP' den Kreis nicht. Aber der zu PP' senkrechte Durchmesser des Kreises schneidet den Kreis in A und B , und OA, OB sind die Achsen. Ist N der Schnittpunkt von AB und PP' , so stellen AN, BN die reziproken Quadrate der Halbachsen dar und ermöglichen die Unterscheidung zwischen der großen und der kleinen Achse im Fall der Ellipse und zwischen der Haupt- und Nebenachse im Fall der Hyperbel. Schneidet PP' den Kreis über OQ in L, M , so ist OL, OM das Geradenpaar mit der Gleichung $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$. *Zacharias (Quedlinburg).*

Casulleras, Juan: Note zu einem Konstruktionsproblem der Quadriken. *Rev. mat. Hisp.-Amer.*, IV. S. 8, 192—194 (1948) [Spanisch].

Bei den Aufgaben der Konstruktion von Quadriken handelt es sich oft um die Bedingung, daß zwei gegebene Geraden konjugiert seien. Wenn die übrigen Bedingungen linear sind, so erhält man bei Absehen von jener ein lineares Büschel von Quadriken, und es entsteht die Frage nach den Eigenschaften der polaren Elemente bezüglich dieses Büschels. Diese Frage behandelt die Note des Verf.

Zacharias (Quedlinburg).

Menon, P. Kesava: On the homogeneous cubic equation. *Math. Student, Madras* 16, 20—24 (1949).

Aus zwei Nullstellen a_i und b_i einer n -ären kubischen Form $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, wofür also $F(a) = F(b) = 0$ ist, läßt sich eindeutig und linear eine dritte Nullstelle $c_i = a_i \sum_v a_v (\partial F / \partial b_v) - b_i \sum_v b_v (\partial F / \partial a_v)$ ableiten. Von dieser Tatsache werden spezielle

Fälle betrachtet, in denen F z. B. symmetrisch in den x_i ist oder in denen F die Gestalt $F = f(x_1, x_2, \dots, x_m) - f(y_1, y_2, \dots, y_m)$ hat, wo also jetzt $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m$ die $n = 2m$ Veränderlichen vorstellen. So wird z. B. eine zweiparametrische Lösung der Gleichung $x_1^3 + x_2^3 = y_1^3 + y_2^3$ in ganzen Zahlen gegeben.

Weitzenböck (Overveen).

Rao, A. Narasinga: On the homogeneous cubic equation — geometrical approach. *Math. Student, Madras* 16, 25—27 (1949).

Von den Resultaten der im vorhergeh. Referat besprochenen Arbeit wird hier eine geometrische Interpretation gegeben. Für kubische Formen $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ kommt dies auf Folgendes heraus: sind a und b zwei Punkte einer Fläche dritter Ordnung F_3 , so ist der dritte Schnittpunkt der Geraden ab mit der Fläche rational berechenbar. Hieran schließen sich Ergänzungen bezüglich der Figur der 27 Geraden auf F_3 und der „äquianharmonischen“ F_3 mit der Gleichung $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$.

Weitzenböck (Overveen).

Bagchi, Haridas: Circles of double contact of a bi-circular quartic. *Bull. Calcutta math. Soc.* 40, 207—225 (1948).

Von einer einfachen symbolischen Darstellung ausgehend, werden zunächst Beziehungen zwischen einer beliebigen (nicht rationalen) bizirkularen Quartik k_4 und ihren doppelt berührenden Kreisen, Inversionskreisen und Fokalkegelschnitten abgeleitet. Ferner werden spezielle k_4 untersucht (Quartiken mit hyperoskulierenden Geraden), woraus sich bemerkenswerte Zusammenhänge mit den Evoluten solcher Quartiken ergeben. Aus der Anwendung der für k_4 abgeleiteten Sätze auf zirkuläre Kubiken wird schließlich (neben den Spezialisierungen der oberwähnten Beziehungen) u. a. auch ein Satz über Kegelschnittssysteme gefolgert, der allerdings bei Beachtung der Polarität bez. eines k_2 unmittelbar evident ist.

H. Horninger (Graz).

Neville, E. H.: The bicircular generation of a conic. *Math. Student, Madras* 15, 71—78 (1947).

Die Abhandlung beinhaltet eine Anwendung der Theorie orientierter Kreise (Zyklographie) auf eine Gruppe von Kegelschnittaufgaben: Von der bekannten Tatsache ausgehend, daß die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei Kreise berühren, zwei Kegelschnitte erfüllen, wird zunächst gezeigt, wie durch Einführung der Orientierung einer derselben ausgezeichnet wird. Ferner werden u. a. Zusammenhänge über Kegelschnitttripel abgeleitet, die paarweise je einen Brennpunkt gemeinsam haben. Hierbei ergeben sich bemerkenswerte Beziehungen zwischen den Schnittsehnen der Kegelschnittpaare, den Leitgeraden der letzteren usw. Schließlich wird noch die Realität der Schnittpunkte dieser Sehnen diskutiert und ihre Abhängigkeit von der Annahme gleich- oder verschiedenartiger Kegelschnittpaare (Ellipse und Ellipse oder Ellipse und Hyperbel usw.) studiert.

H. Horninger (Graz).

Pompeiu, D.: Über das anharmonische Verhältnis. Soc. Română Ști., Sect., mat., Bul. Șed., II. S. 2, 25—27 (1948) [Rumänisch].

Verf. kritisiert die Art, wie gewöhnlich in den elementaren Lehrbüchern das Doppelverhältnis eingeführt wird. Erschlägt vor, von der homographischen Substitution $y = (a + b) : (c + d)$ auszugehen und zu zeigen, daß für diese das Doppelverhältnis $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$ invariant ist. Er verweist auf die analogen Fälle der linearen Funktion $y = ax + b$, für die das einfache Verhältnis $(x_3 - x_1) : (x_2 - x_1)$ invariant ist, und auf die quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$, für die $(x_3 - x_1) = 3(x_3 - x_2)$ die entsprechende Bedeutung hat. Verf. erklärt, seine Überlegungen seien durch eine Bemerkung Cartans in seiner Vorrede zu Bouligands Analytischer Geometrie angeregt worden, in der jener mit Befriedigung bemerkt, daß dort das Doppelverhältnis im Anschluß an die homographischen Transformationen eingeführt werde, wodurch man seine wahre Bedeutung erfasse.

Zacharias (Quedlinburg).

Benneton, Gaston: Configurations harmoniques et quaternions. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 64, 1—58 (1947).

Diese Abhandlung enthält eine neue Darstellung der Theorie derjenigen räumlichen Punkt-Ebenen-Konfigurationen, die in bezug auf eine Quadrik Q autopolar sind; solche Konfigurationen werden hier harmonisch genannt; sie enthalten ebensoviele Punkte wie Ebenen; das Symbol n_p bedeutet eine aus n Punkten und n Ebenen bestehende harmonische Konfiguration, wenn jede Ebene p Punkte enthält und jeder Punkt auf p Ebenen liegt. Wenn man das System eines Punktes und seiner Polarebene in bezug auf Q mit dem Namen Element bezeichnet und wenn zwei Elemente $P, \pi; P', \pi'$ als inzident bezeichnet werden, wenn P, P' in bezug auf Q konjugiert sind, so kann man sagen, daß eine harmonische n_p -Konfiguration aus n Elementen besteht, so daß jedes Element mit p Elementen der Konfiguration inzident ist. Es sei jetzt $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ die Gleichung der Grundquadrik Q ; dem Punkt $P(x_0, y_0, z_0, t_0)$ und seiner Polarebene π in bezug auf Q läßt Verf. die Quaternion $x_0 + y_0 i + z_0 j + t_0 k$ entsprechen (diese Quaternion ist nur bis auf einen skalaren Faktor bestimmt); zwei Elemente sind inzident, wenn die entsprechenden Quaternionen zueinander orthogonal sind. Es folgt, daß eine harmonische n_p -Konfiguration mit einem System von n Quaternionen dargestellt werden kann, so daß jede Quaternion des Systems immer zu p Quaternionen des Systems orthogonal ist. Ein ähnlicher Gedanke kann auch für Konfigurationen angewendet werden, die in bezug auf einen linearen Strahlenkomplex autopolar sind; die Orthogonalitätsbedingung ist dann durch eine andere lineare Bedingung zu ersetzen. Nach allen diesen Erklärungen findet man im ersten Teil der Abhandlung einige allgemeine Methoden, um die Inzidenzen einer n_p -Konfiguration mit einer geeigneten Inzidenztafel darzustellen und um die Zusammensetzung von zwei Konfigurationen durch Quaternionen-Produkte auszudrücken; man findet, daß zwei inzidente Elemente zwei ebenfalls inzidente Elemente liefern, wenn sie mit einer beliebigen Quaternion multipliziert werden; wenn man also die Quaternionen einer n_p -Konfiguration mit allen denjenigen einer m_q -Konfiguration ausmultipliziert, erhält man im allgemeinen die Quaternionen einer mn_{p+q} -Konfiguration. Wichtig ist auch für das folgende die Darstellung der Kollineationen, die die Quadrik Q in sich selbst überführen, durch Quaternionenprodukte und die Anwendung einer solchen Darstellung auf verschiedene Untergruppen jener Kollineationen, insbesondere auf diejenige, die auch eine harmonische n_p -Konfiguration invariant lassen. — Im 2. Teil werden als Anwendung der im ersten Teil dargestellten Methoden zahlreiche Konfigurationen betrachtet; sie werden zunächst durch ihre üblichen geometrischen Eigenschaften definiert und erst dann dem Quaternionenkalkül unterworfen. Zunächst die 4_3 -Konfiguration, die aus einem in bezug auf Q autopolaren Tetraeder besteht, auch im Falle, daß das Tetraeder der Quadrik Q ein- und umgeschrieben ist. Dies führt zu den Systemen von Quadriken, die paarweise involutorisch liegen, so daß also jede Quadrik des Systems in bezug auf alle anderen autopolar ist. Es folgen: Die Konfigurationen, die aus Paaren von autopolaren Tetraedern bestehen; die Möbiusschen Tetraederpaare; die desmischen Tetraederpaare und Tetraedersysteme; die desmische Konfiguration 24_3 ; die Kummersche Konfiguration 16_6 ; die Konfiguration 4^n_n , die aus paarweise eingeschriebenen Kummerschen Konfigurationen besteht; die Kleinsche Konfiguration 60_{15} und die in ihr enthaltenen Konfigurationen $4n_{2n+1-2p}$, die aus n der 15 Tetraeder der Kleinschen Konfiguration bestehen, so gewählt, daß ein jedes der n Tetraeder in desmischer Lage mit p anderen und in harmonischer Lage mit den $n - p - 1$ übrigen liegt, usw.

E. G. Togliatti (Genova).

Padma, N.: Skew tensors and region-complexes in S_n . J. Indian math. Soc., n. S. 13, 91—104 (1949).

Sind $\pi_{i_1 \dots i_d}$ die homogenen Punktkoordinaten eines Gebietes G_d von d -ter Stufe (= linearer Raum von $d - 1$ Dimensionen) in einem projektiven G_n , so stellt eine lineare Gleichung

$$K = \sum a^{ikl \dots} \pi_{ikl \dots} = a^{i_1 \dots i_d} \pi_{i_1 \dots i_d} = 0$$

einen linearen G_d -Komplex im G_n dar. Verwendet man Raum-Koordinaten $\pi^1 \dots \pi_{n-d}$ des G_d , so kann man auch schreiben:

$$K = \sum a_{j_1 \dots j_{n-d}} \pi^{i_1 \dots i_{n-d}} = 0,$$

wobei $a_{j_1 \dots j_{n-d}} = a^{i_1 \dots i_d}$ ist, wenn die $(i_1 \dots i_d)$ das algebraische Komplement von $(j_1 \dots j_{n-d})$ sind. — Nach einigen allgemeinen Bemerkungen werden im Anschluß an S. Kantor [S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., IIa 112, 755—814 (1903)] die einfachsten Kovarianten betrachtet, die sich linear aus den $a^{i_1 \dots i_d}$ und einem Punkte x_i bzw. einem linearen G_{n-1} w^i bilden lassen. So ist z. B. x ein „singulärer Punkt“ des Komplexes K , wenn $K_1 = a^{i i k l \dots} x_i$ für alle $i k l \dots$ verschwindet. K_1 wird „ x -Kontraktion“ von K genannt. Auf der Hand liegende Tatsachen werden in einer Reihe von Sätzen formuliert, so z. B. die, daß die singulären Punkte von K einen linearen Raum bilden. Theorem 3 besagt, daß ein Komplex K mit $n - d - 2$ linear-unabhängigen singulären Punkten notwendig ein spezieller G_d -Komplex sei, eine Tatsache, die unmittelbar aus den quadratischen p -Relationen

$$Q = \sum_{i k} a^{i k l m \dots} a_{i k r s \dots}$$

zu folgern ist. Ref. betont, daß es vorteilhafter ist, bei diesen Untersuchungen mit Stufenzahlen statt mit Dimensionen zu arbeiten und bei analytischer Behandlung von Komplexsymbolen Gebrauch zu machen. Weitzenböck (Overveen).

Teixidor, J.: Über die Darstellung eines komplexen S_2 mittels eines reellen S_4 . Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 7, 173—177 (1947) [Spanisch].

Bildet man die komplexen Punkte $x = x_1 + i x_2$, $y = y_1 + i y_2$ einer Ebene S_2 auf die reellen Punkte $x_1, x_2; y_1, y_2$ eines S_4 ab, so zeigt sich, daß die Fernpunkte des projektiven P_2 über S_2 den Geraden eines elliptischen Geradennetzes im P_4 über S_4 zugeordnet werden können. Dieses im wesentlichen z. B. in der Arbeit von K. Kommerell, Math. Ann., Berlin 60 (1905) enthaltene Ergebnis wird hier neu begründet.

W. Blaschke (Hamburg).

Casulleras, Juan: Über die Darstellung eines komplexen E_n mittels eines reellen E_{2n} . Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 51—56 (1948) [Spanisch].

Im Anschluß an die Arbeit von Teixidor (s. vorsteh. Referat) wird die entsprechende Abbildung eines affinen Raumes E_n mit den Punkten $x_j = x'_j + i x''_j$; $j = 1, 2, \dots, n$; $i^2 = -1$ auf die reellen Punkte des E_{2n} mit den Zeigern (x'_j, x''_j) auf die Fernpunkte des E_n ausgedehnt, wie das J. M^a. Planas [Mem. Acad. Ci. Artes Barcelona, III. S. 25, 109—172 (1935) in ähnlicher Weise getan hat.

W. Blaschke (Hamburg).

Algebraische Geometrie:

● Godeaux, Lucien: Géométrie algébrique. I.: Transformations birationnelles. Géométrie projective hyperspatiale. II.: Géométrie sur une courbe algébrique. Géométrie algébrique du plan. Liège: Science et Lettres 1948, 1949. 236, 210 p.

Diese Darstellung der algebraischen Geometrie ist in drei Bände eingeteilt, von welchen bis jetzt zwei erschienen sind. Der erste Band enthält die Theorie der birationalen Transformationen in der Ebene und im Raume und die Grundlagen der projektiven Geometrie der mehrdimensionalen Räume. Der zweite Band enthält die Geometrie einer algebraischen Kurve und die algebraische Geometrie in der Ebene. Der dritte Band wird die Geometrie auf einer algebraischen Fläche enthalten. Zweck des Verf. ist nicht, ein vollständiges Lehrbuch zu geben, sondern den Leser so rasch als möglich instand zu setzen, die Originalarbeiten über algebraische Geometrie zu lesen und zu verstehen. Das Werk ist für die französischen Studierenden besonders wichtig. Die hier entwickelte algebraische Geometrie ist im Sinne der Methoden besonders der italienischen Schule zu verstehen, einer Richtung, zu der Verf. bekanntlich auch persönlich beigetragen hat. — Im 1. Teil findet man zunächst die Theorie der ebenen quadratischen Transformationen und ihre Anwendung auf die Auflösung der singulären Punkte einer ebenen algebraischen Kurve; dann die Theorie der ebenen Cremonaschen Verwandtschaften und die Ausdehnung auf den dreidimensionalen Raum; alles mit zahlreichen Beispielen. — Der 2. Teil wendet sich, nach einigen Grundlagen über den mehrdimensionalen projektiven Raum und über seine

projektiven Transformationen, den allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Mannigfaltigkeiten zu; die rationalen Kurven und Flächen und die Segreschen Mannigfaltigkeiten werden besonders untersucht. Schließlich etwas über die Liniengeometrie als Geometrie auf einer V_4^2 eines Raumes S_5 . — Im dritten Teil findet man die klassische Theorie der Linearscharen auf einer algebraischen Kurve und die geometrische Theorie der algebraischen Korrespondenzen zwischen algebraischen Kurven, wie sie von F. Severi aufgebaut worden ist. Es folgt die funktionentheoretische Behandlung derselben Theorien durch Abelsche Integrale. — Im 4. Teil findet man die Untersuchung der Linearsysteme ebener algebraischer Kurven vom Standpunkte der birationalen Transformationen aus; ihre Reduktion auf birational verschiedene Typen; die zyklischen ebenen Cremonaschen Verwandtschaften; die ebenen Cremonaschen Verwandtschaften mit einer Kurve von Doppelpunkten; die kontinuierlichen Gruppen ebener Cremonascher Transformationen; die Klassifikation der ebenen Involutionen 2. Ordnung. *E. G. Togliatti (Genova).*

Mey, G. van der: Die Sylvestersche Determinante. Verhdl. Nederl. Akad. Wet. Amsterdam, Afd. Natuurk., I. Sect., No. 3, 39 S. (1949) [Holländisch].

Die vorliegende Arbeit, deren Lektüre durch das Fehlen einer Einleitung und jeglicher Literaturhinweise einigermaßen erschwert wird, hat offenbar das Ziel, zu zeigen, daß man mit Hilfe der gewöhnlichen Sylvesterschen Resultante — (nicht der Mertensschen u -Resultante) — nicht nur die Schnittpunktmultiplizität zweier ebener algebraischer Kurven in einem gegebenen Punkte einwandfrei definieren kann, sondern daß man darüber hinaus auch in schwierigen Fällen imstande ist, nach der gewählten Methode die Vielfachheiten explizit zu bestimmen. In der Tat gelingt es dem Verf. im abschließenden Paragraphen, die für den einfachen Fall gültigen Plückerschen Formeln in der Weise zu verschärfen, daß eine komplizierte Singularität in wohldefinierter Weise durch eine Anzahl äquivalenter einfacher Singularitäten (gewöhnliche Doppelpunkte und Spitzen) ersetzt wird. [Alle möglichen Typen von Singularitäten können allerdings auf diese Weise nicht erfaßt werden, vgl. die einschränkenden Voraussetzungen hinsichtlich der Gültigkeit von Formel (13), Satz 1, S. 35.] Das wichtigste algebraische Hilfsmittel bei der Multiplizitätsberechnung sind zwei Resultantenbildungen, im Text mit $R(F, G)$ und $S(f, g)$ bezeichnet, die bei Benutzung homogener Koordinaten x_1, x_2, x_3 den Punkt $(1, 0, 0)$ auszeichnen, und die dementsprechend gegenüber allen und nur den projektiven Transformationen der Ebene kovariant sind, die $(1, 0, 0)$ in sich überführen. — Es erscheint wünschenswert, die gewonnenen Ergebnisse näher mit den Resultaten zu vergleichen, die man bei komplizierten Singularitäten dann erhält, wenn man zu ihrer Auflösung die Puiseuxschen Reihenentwicklungen benutzt, bzw. wenn man sich der Terminologie der unendlich benachbarten Singularitäten bedient. *Krull.*

Samuel, Pierre: Multiplicités des composantes singulières d'intersection. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 292—294 (1949).

Sind U, V zwei Teilmannigfaltigkeiten einer Mannigfaltigkeit Ω im n -dimensionalen affinen Raum, M eine höchstdimensionale Komponente des Durchschnittes von U und V , so kann man nach der Theorie von Weil-Chevalley, falls M auf Ω einfach ist, die relative Schnittpunktmultiplizität $i_\Omega(M; V, U)$ von U und V in M auf Ω definieren. Verf. zeigt, daß sich die Weil-Chevalleysche Theorie auf gewisse auf Ω singuläre Mannigfaltigkeiten M ausdehnen läßt. Die Untersuchungen bilden die Fortsetzung einer früheren Note [C. r. Acad. Sci., Paris 228, 158—159 (1949)], deren Bezeichnungsweise übernommen wird. *Krull (Bonn).*

Galafassi, Vittorio Emanuele: Questioni di realtà sulle curve trigonali reali. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 135—151 (1948).

Eine trigonale Kurve ist eine nicht hyperelliptische algebraische Kurve, die mindestens eine Vollschar g_3^1 enthält. Jede nicht hyperelliptische algebraische Kurve vom Geschlecht $p = 3$ oder $p = 4$ ist trigonal und enthält eine g_3^1 . Nach A. Maroni [Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 25, 341—354 (1946)] hat eine trigonale Kurve außer dem Geschlecht p noch eine bei birationalen Transformationen invariante ganze Zahl, die Gattung (specie) m , für die $\frac{1}{3}(p-4) \leq m \leq \frac{1}{2}(p-2)$ ist. Die Anzahl k der Züge einer reellen trigonalen Kurve vom Geschlecht p und

von der Gattung m genügt der Ungleichung $\varepsilon \leq k \leq p + 1$, wo ε von den Zahlen p und m abhängig entweder Null oder Eins ist. Es gibt zu jedem Geschlecht p und zu jeder der obigen Ungleichung genügenden Zahl m bzw. k aus k Zügen bestehende trigonale Kurven vom Geschlecht p und von der Gattung m . — Das Modell der trigonalen Kurven vom Geschlecht p ist die kanonische Kurve C^{2p-2} ($2p-2$)-ter Ordnung im Raum S_{p-1} . Die Punkte der Punktgruppen von g_3^1 sind auf dieser kanonischen Kurve kollinear. Ihre Geraden bilden eine rationale Regelfläche von S_{p-1} . Im Falle $p = 3$ ist die kanonische Kurve eine allgemeine ebene Kurve vierter Ordnung. Durch Betrachtung der Verteilung der reellen Gruppen von g_3^1 auf den Zügen vierter Ordnung lassen sich diese Kurven vom Geschlecht 3 in 19 Typen einteilen. Durch Induktion von $p-1$ auf p läßt sich beweisen, daß sich auch die trigonalen Kurven vom höherem Geschlecht in Typen einteilen lassen. *Gy. Sz.-Nagy.*

Sz.-Nagy, Gyula: Darstellung algebraischer Flächen von Gestalt einer Kurve. *Hung. Acta Math.* **1**, 10—11 (1949).

Die Fläche $z^2 + f^2(x, y) - \varepsilon^2 = 0$ ist, wie leicht ersichtlich, für genügend kleine ε visuell von der Kurve $f(x, y) = 0$ nicht zu unterscheiden und besitzt bei $\varepsilon = 0$ nur die Punkte derselben als einzige reelle Punkte. Verf. zeigt dann, daß die Fläche $[z h(x, y) - g(x, y)]^2 + f^2(x, y) - \varepsilon^2 = 0$ für genügend kleine ε von der Raumkurve $f(x, y) = 0$, $z = g(x, y)/h(x, y)$ beliebig wenig verschieden ist. Da man nun beliebige Knoten und Verkettungen durch algebraische Raumkurven realisieren kann, ergibt sich demnach, daß auch algebraische Flächen die Gestalt von Schläuchen eines vorgegebenen topologischen Typs besitzen können. *Bureau.*

Gaeta, Federico: Über arithmetisch normale Kurven und Flächen des S_r . *Rev. mat. Hisp.-Amer.*, IV. S. **7**, 255—268 (1947) [Spanisch].

Gaeta, Federico: Über die arithmetisch normalen Flächen und Mannigfaltigkeiten des S_r . *Rev. math. Hisp.-Amer.*, IV. S. **8**, 72—82 (1948) [Spanisch].

H. T. Muhly [*Ann. Math.*, Princeton, II. S. **42**, 921—925 (1941)] has characterized the arithmetically normal varieties, considered systematically by Zariski, as varieties on which the hypersurfaces V_{r-1}^m of its ambient space S_r cut out, for every m , a complete linear system. It is the algebro-geometric property that really matters in the present papers; actually the expression „arithmetically normal“ is used only for the sake of brevity. The methods are mainly based on the postulation formulae established by Severi (1903). — It is proved: Let C, C' be two irreducible curves without singularities, complete intersection of $r-1$ hypersurfaces in S_r . If C is arithmetically normal, then C' is also arithmetically normal. — Since an irreducible curve without singularities, complete intersection of $r-1$ hypersurfaces in S_r , is arithmetically normal, it follows as a corollary that any curve of finite residual (Gaeta, this Zbl. **30**, 363) is arithmetically normal. In S_3 the converse is also true. The theorem and the corollary can both be extended to the case of regular surfaces. — For surfaces it is also proved: An irreducible surface without singularities is regular and arithmetically normal if and only if its generic hyperplane section is arithmetically normal. As a consequence it follows: An irreducible, regular, subcanonical and arithmetically normal surface of S_4 is the complete intersection of two hypersurfaces. The converse follows from a result of Severi. — For varieties the au. proves: Let V_d and W_d be two irreducible d -dimensional varieties without singularities, intersection of $r-d$ hypersurfaces in S_r , and let Z_{d-1} be the intersection of V_d and W_d . If V_d, W_d are arithmetically normal and Z_{d-1} is irreducible and has no singularities, then Z_{d-1} is arithmetically normal. For $d \geq 2$, the converse is true. These results are applied to the study of the subcanonical and arithmetically normal curves in S_4 . Finally the following characteristic property is stated: The irreducible variety V_d without singularities is arithmetically normal if and only if the homogeneous ideal corresponding to the mixed variety $W_d + I'_{d-1}$ is generated by $r-d+1$ forms, where W_d , which is supposed without multiple parts, con-

stitutes with V_d the complete intersection of $r-d$ hypersurfaces and Γ_{d-1} is the component of the section of V_d , outside the common part of V_d and W_d , by an adjoint.
Ancochea (Madrid).

Gaeta, Federico: Über die Klassifikation der algebraischen Kurven eines S_r . Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 165—173 (1948) [Spanisch].

Two irreducible curves C, C' without singularities are complementary in S_r if they constitute the complete intersection of $r-1$ hypersurfaces. If n_1, \dots, n_{r-1} are the orders of these hypersurfaces, let $\varrho = \sum n_i - r + 1$. The following theorem is proved: If Δ_m, Δ'_m denote the deficiency of the linear series cut out respectively on C, C' by the hypersurfaces of the order m , then is $\Delta_m = \Delta'_{\varrho-m}$ ($0 < m < \varrho$). The analogous theorem for regular surfaces is also established. — For an irreducible curve C without singularities, let Δ_m have the above meaning; from a well known result of Castelnuovo it follows that the succession (*) $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ has only a finite number of terms $\neq 0$. The curve C is called a 1-species curve when all the Δ_i vanish; in the other case, if Δ_μ, Δ_ν denote the first and the last terms $\neq 0$ in (*), C is called a s -species curve when $s = \nu - \mu + 2$. The au. applies this classification to the study of the curves in S_3 . He proves that there exist s -species curves for every s , and that this fact already occurs for curves lying in a regular quadric. Ancochea.

Gaeta, Federico: Sulle curve sgheembe algebriche di residuale finito. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 177—241 (1948).

Une courbe C_ϱ de résidu fini ϱ dans S_3 est celle que l'on peut déduire par une chaîne minimum finie $C_0, C_1, \dots, C_\varrho$ d'une intersection complète C_0 de deux surfaces. Une courbe C_{i+1} de cette chaîne se déduit de C_i comme reste de l'intersection de deux surfaces passant par C_i . On suppose en outre que C_i et C_{i+1} sont irréductibles, sans points multiples, et que les surfaces qui les définissent se coupent le long de C_i et C_{i+1} dans des conditions ordinaires (intersection simple etc.). L'A. arrive alors à montrer l'identité des courbes de résidu fini avec les courbes arithmétiquement normales; de plus il donne le nombre minimum des formes de base pour l'idéal de la courbe C_ϱ , ce nombre est exactement $k = \varrho + 2$, et il n'est pas limité. — Une courbe arithmétiquement normale est identique à une courbe sans point multiple dite de 1^{ère} espèce, d'après P. Dubreil [Actual sci. industr. Nr. 210. Paris 1935; ce Zbl. 11, 268]. Certains problèmes posés à propos des courbes de 1^{ère} espèce trouvent ici leur solution; par exemple, deux courbes complémentaires C et C' , sans points multiples, sont de même espèce. La démonstration fait intervenir les défauts Δ_l des séries découpées sur C par les surfaces d'ordre l ; si Δ_μ et Δ_ν sont respectivement le premier et le dernier défaut non nul, tous les entiers Δ_i ($\mu \leq i \leq \nu$) forment la suite caractéristique de C . La courbe C est dite d'espèce s si le nombre des éléments de la suite caractéristique de C est $s-1$. Les courbes d'espèce 1 sont celles de 1^{ère} espèce. L'A. établit alors que les suites caractéristiques de deux courbes complémentaires C et C' sont les mêmes, à une inversion près de l'ordre. Il en résulte non seulement que C et C' sont en même temps de 1^{ère} espèce ou non, mais encore qu'elles ont la même espèce s . Ce résultat est démontré dans S_r , et il s'étend à deux surfaces complémentaires dans S_r , à condition de supposer les deux surfaces régulières. L'A. montre d'ailleurs que deux surfaces complémentaires arithmétiquement normales sont régulières. — D'autre part Gherardelli a caractérisé les courbes C de S_3 qui sont de résidu 0 par deux propriétés: 1^o) C est arithmétiquement normale. 2^o) C est hypocanonique (sottocanoniche), c'est-à-dire que les surfaces d'un certain ordre bien déterminé découpent sur C la série canonique. En se proposant de voir si les conditions analogues sont caractéristiques d'une courbe intersection dans S_r de $n-r$ formes, l'A. obtient une réponse négative, en montrant que l'intersection de deux surfaces F et F' arithmétiquement normales et complémentaires dans S_r (c'est-à-dire constituant ensemble l'intersection simple et complète de $r-2$ formes) est une courbe arithmétiquement normale et hypocanonique privée

de points multiples, et qui n'est pas l'intersection complète de $r-1$ formes pour $r \geq 4$. De même une surface F dans S_r , intersection complète de $r-2$ formes, n'est pas caractérisée pour $r > 4$ par les propriétés d'être arithmétiquement normale et hypocanonique; cependant si l'on ajoute pour $r = 4$ la régularité de la surface ces propriétés deviennent suffisantes. — Des résultats aussi pénétrants ne peuvent être obtenus pour les variétés à plus de deux dimensions faute d'avoir des renseignements suffisants sur la dimension des systèmes linéaires. Cependant l'A. obtient quelques théorèmes tout à fait généraux, comme: la condition nécessaire et suffisante pour que deux variétés complémentaires V_d et W_d dans S_r soient de 1^{ère} espèce est que leur intersection Γ_{d-1} soit de 1^{ère} espèce. Citons encore: La condition nécessaire et suffisante pour que l'idéal d'une variété V_d dans S_r soit engendré par $r-d+1$ formes est qu'elle possède un reste W_d , hypocanonique et arithmétiquement normal, vis à vis de $r-d$ formes passant par V_d . — Des exemples variés viennent illustrer toute la théorie. — [Note: Certains des résultats de l'A. ont également été obtenus par R. Apéry dans sa thèse (Paris 1947).]

L. Lesieur (Poitiers).

Severi, Francesco: Il punto di vista grupale nei vari tipi di equivalenza sulle varietà algebriche. Comment. mat. Helvetici **21**, 189—224 (1948).

Für die gruppentheoretische Behandlung der verschiedenen Typen der Äquivalenz auf algebraischen Mannigfaltigkeiten erinnert Verf. daran, daß er sich in verschiedenen früheren Arbeiten [erschieden in Rend. Circ. mat. Palermo **30**, 265—288 (1910) und in Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VI. S. **17**, 419—425, 491—497, 597—600 (1933); dies. Zbl. **7**, 32, 76] schon damit beschäftigt hatte. Er erwähnt ferner, daß die Abhängigkeit der verschiedenen Typen von der besonderen Wahl einer invarianten Untergruppe der Abelschen Gruppe, bestehend aus den Mannigfaltigkeiten V_k (als Elemente betrachtet) einer gegebenen Mannigfaltigkeit M_r ($k \leq r-1$), von J. A. Todd (vgl. dies. Zbl. **9**, 371) festgestellt worden ist. In der vorliegenden Arbeit nimmt Verf. die gruppentheoretischen Entwicklungen wieder auf und ergänzt und erweitert sie, indem er die Verbindung klar legt, die sie zwischen der algebraischen Geometrie und der Theorie der abstrakten Gruppen bedingt. Die gruppentheoretischen Betrachtungen geben dem Verf. Anlaß, den Begriff der algebraischen Äquivalenz in einer endgültigen Form zu bringen. Zwei wirkliche Mannigfaltigkeiten A, B der Mannigfaltigkeit M_r werden algebraisch äquivalent genannt, wenn sie totale Mannigfaltigkeiten ein und desselben algebraischen irreduziblen Systems von Mannigfaltigkeiten auf M_r sind oder es durch Hinzufügen ein und derselben wirklichen Mannigfaltigkeit C werden. Darauf wird die Transitivität der algebraischen Äquivalenz für wirkliche Mannigfaltigkeiten bewiesen, und, nachdem der Begriff der algebraischen Äquivalenz auf virtuelle Mannigfaltigkeiten ausgedehnt worden ist, wird die Transitivität auch für diese bewiesen. — Im Falle der Kurven auf einer Fläche M_r ($k = 1, r = 2$) fällt die algebraische Äquivalenz virtueller Kurven mit der topologischen Äquivalenz zusammen, und die Transitivität der algebraischen Äquivalenz mit der Transitivität der topologischen Äquivalenz, wie Lefschetz bewiesen hat (L'Analysis situs et la géométrie algébrique, Paris 1924, S. 81). Verf. bemerkt, daß die Möglichkeit des Zusammenfallens der algebraischen und topologischen Äquivalenz der $2k$ -dimensionalen algebraischen Zyklen einer M_r noch nicht allgemein bewiesen worden ist. Es wird ferner gezeigt, daß die Abelsche Gruppe der algebraischen Äquivalenz durch eine endliche Anzahl von $\varrho + \tau$ Elementen erzeugt werden kann, und daß sie als (endliche) Untergruppe die Gruppe der algebraischen Division hat. Dabei bezeichnet ϱ die Anzahl der Elemente der Abelschen Gruppe der algebraischen Äquivalenz, die eine intermediäre Basis bilden, und τ die Anzahl der erzeugenden Elemente der algebraischen Divisionen, die eine Normalbasis bilden. — Neben der algebraischen Äquivalenz findet für die V_{r-1} einer M_r die lineare Äquivalenz statt.

(Zwei V_{r-1} sind linear äquivalent, wenn sie totale Mannigfaltigkeiten ein und desselben linearen Systems sind.) Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Gruppe der linearen Äquivalenz von einer endlichen Anzahl von Elementen erzeugt werde, ist, daß die sie enthaltende Mannigfaltigkeit M_r „flächenregulär“ sei. — Die Probleme, welche die Aufsuchung der Basis der Abelschen Gruppen der algebraischen Äquivalenz, der linearen Äquivalenz, der algebraischen und linearen Division und die Flächenirregularität betreffen, werden mit den entsprechenden Problemen der Geometrie auf einer Mannigfaltigkeit in Verbindung gebracht. Außerdem wird der allgemeine Begriff der rationalen Äquivalenz [gegeben in einer früheren Arbeit des Verf., C. r. Acad. Sci., Paris 198, 422—424 (1934); dies. Zbl. 8, 271], deren charakteristische Eigenschaften nicht von der gruppentheoretischen Auffassung erledigt werden können, ergänzt und vertieft und eine engere Definition gegeben (zwei virtuelle — im besonderen, wirkliche — Mannigfaltigkeiten V_k auf M_r sind rational äquivalent, wenn sie totale Mannigfaltigkeiten ein und desselben „unirationalen“ Systems sind oder es durch Hinzufügen ein und derselben Mannigfaltigkeit C werden). — Auf weitere Entwicklungen wird hingewiesen. *M. Piazzolla-Beloch.*

Lorent, H.: Sur une famille de sécantes d'une cubique plane de genre un. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 143—149 (1948).

Eine ebene Kurve dritter Ordnung des Geschlechts 1 wird hier durch ihre Abelschen Integrale erster Gattung, wie üblich, parametrisch dargestellt. Ist auf der Kurve ein Punkt A gegeben, so gibt es auf der Kurve $(3n-1)^2$ Punkte B_i , so beschaffen, daß je eine Kurve n -ter Ordnung existiert, die mit der gegebenen Kurve den Punkt A , einmal gezählt, und je einen der Punkte B_i , $(3n-1)$ -mal gezählt, gemein hat. Verf. behandelt die Aufgabe, eine Gerade σ zu finden, die zwei der Punkte B_i und den Tangentialpunkt eines dritten Punktes B_i enthält; er bestimmt die Anzahl dieser Geraden σ und ihre Verteilung in bezug auf die Punkte B_i . [Es ist zu bemerken, daß die Kongruenz $x + y - 2z \equiv 0 \pmod{3n-1}$, s. 144, auch mit ungerader Summe $x + y$ gelöst werden kann; Beispiel: $n = 2$, $p_1, p_2, p_3 = 2, 3, 0$, $q_1, q_2, q_3 = 4, 3, 1$.] Dann betrachtet Verf. die weiteren Schnittpunkte der gegebenen Kurve mit einer Kurve der Ordnung n , welche A und $3n-3$, oder $3n-4$, oder $3n-5$, der Punkte B_i enthält, und gibt einige Eigenschaften solcher Punkte. Eine Ausdehnung auf eine elliptische Raumkurve 4. Ordnung wird kurz angedeutet.

E. G. Togliatti (Genova).

Godeaux, Lucien: Remarques sur les surfaces algébriques irrégulières. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 464—469 (1949).

Als Anwendung der Äquivalenzsätze (von F. Severi) von zwei algebraischen Kurven auf einer algebraischen Fläche F , beweist Verf., daß eine Kurve K des Geschlechts $\pi > 0$, die der Fläche F angehört, entweder isoliert ist oder einem irrationalen Büschel angehört, sobald π kleiner als die Irregularität der Fläche F ist. Grundgedanke des Beweises ist die Betrachtung der $\infty^{\pi-\delta}$ ($\delta \geq 0$) Linearscharen g_m , die die Kurven eines geeigneten vollständigen kontinuierlichen Systems $\{C\}$ auf K schneiden, und die Betrachtung des Teilsystems $\{C_0\}$ von $\{C\}$, deren $\infty^{q-\pi+\delta}$ Linearsysteme auf K dieselbe Linearschar g_m schneiden. Im Falle, daß K einem irrationalen Büschel $\{K\}$ des Geschlechts π' angehört, muß $\pi' \geq q - \pi + \delta$ sein. Schließlich einige Bemerkungen über die Jacobischen Mannigfaltigkeiten der Kurve K und des irrationalen Büschels $\{K\}$.

E. G. Togliatti (Genova).

Godeaux, Lucien: Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 65, 189—210 (1948).

L'A. considère une surface algébrique contenant une involution I_p cyclique d'ordre premier impaire p , n'ayant qu'un nombre fini de points unis et en construit comme modèle projectif une surface normale F d'un espace linéaire S_r , sur laquelle I_p est déterminée par une homographie cyclique T de l'espace ambiant S_r , possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$. — Il désigne par $|C_i|$ le système, appartenant à

l'involution, de courbes découpé sur F par les hyperplans de S_r passant par $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{p-1}$ ($i = 0, 1, \dots, p-1$). Le système $|C_0|$ est dépourvu de points base; les autres ont pour points base les points unis de F . En rapportant projectivement les courbes de $|C_0|$ aux hyperplans d'un espace linéaire de dimension convenable, on obtient une surface normale Φ image de l'involution. A un point uni A de la surface F correspond sur Φ un point de diramation A' . Lorsque le point A est uni „parfait“, les courbes C_0 passant par A acquièrent en ce point la multiplicité p , les tangentes étant variables. Le point de diramation correspondant A' est multiple d'ordre p pour la surface Φ , le cône tangent étant rationnel et irréductible. — Lorsque le point A est uni „non parfait“ pour l'involution, simple pour la surface F , il existe dans le domaine du premier ordre de ce point deux points unis pour l'involution. Soient a_1, a_2 les tangentes à F en A passant par ces points. — Les courbes C_0 passant par A , acquièrent en ce point une multiplicité $s_1 < p$, les tangentes étant confondues avec a_1, a_2 . Appellons $|C'_0|$ le système formé par ces courbes. Les courbes C'_0 assujetties à toucher en A une droite distincte de a_1, a_2 forment un système $|C''_0|$ dont les courbes ont en A une multiplicité $s_2 < p$. Et ainsi de suite ($0 \leq s_1 < s_2 < \dots < p$). On construit ainsi une suite des systèmes linéaires $|C'_0|, |C''_0|, \dots$, dont les courbes ont en A des multiplicités croissantes, les tangentes en ce point étant confondues avec deux droites, sauf pour le dernier système, dont les courbes ont en A la multiplicité p et des tangentes variables. — Au point A est attaché un entier positif k ($1 < k < p$), tel que, si les courbes C'_i ont λ_i tangentes en A confondues avec a_2 et μ_i tangentes confondues avec a_1 , on ait: $\lambda_i + k\mu_i \equiv 0 \pmod{p}$, où $\lambda_i + \mu_i < k$. — Parmi les systèmes $|C_1|, |C_2|, \dots, |C_{p-1}|$, il en est deux pour lesquels A est un point base simple. Les courbes de l'un, $|C_1|$, de ces systèmes touchent la droite a_2 en A , et les courbes de l'autre, $|C_k|$, touchent la droite a_1 en ce point. Les courbes C_1, C_k rencontrent les courbes C'_0, C''_0, \dots en p points confondus en A . — Déterminer la structure du point A revient à déterminer les différentes branches d'origine A appartenant aux courbes C'_0, C''_0, \dots , et leur comportement en A . — On en déduit alors la structure du point de diramation A' de Φ , c'est à dire sa multiplicité et la configuration formée par les cônes tangents à la surface Φ en ce point. — L'A. donne ensuite une application de la méthode au cas particulier où le nombre premier p est de la forme $p = 10\eta + 3$, et $k = 5$.

M. Piazzolla-Beloch (Ferrara).

Godeaux, Lucien: Points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 5, 243—246 (1948).

L'A. étudie une involution cyclique d'ordre $p = 23$ appartenant à une surface algébrique, et la structure d'un point uni particulier, comme application de la méthode publiée dans l'article analysé ci-dessus.

M. Piazzolla-Beloch (Ferrara).

Godeaux, Lucien: Étude d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique. Bull. École Polytechn. Jassy 3, 107—112 (1948).

L'A. utilise la construction de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques (d'ordre premier p) n'ayant qu'un nombre fini de points unis de même espèce, indiquée par lui dans une note du Bull. Soc. Sci. Liège 17, 196—199 (1948), en étudiant le cas particulier $p = 2\nu + 1$.

M. Piazzolla-Beloch (Ferrara).

Hans-Frère, Andrée: Sur la transformation birationnelle du troisième ordre de l'espace. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 150—154 (1948).

Geometrische Beweise einiger Eigenschaften der Flächen dritter Ordnung, die durch eine Raumkurve 6. Ordnung des Geschlechts 3 hindurchgehen; diese Eigenschaften folgen aus der Betrachtung der kubischen Cremonaschen Verwandtschaft, die von jenen Flächen dritter Ordnung definiert wird. Es seien Γ, Γ' die zwei Fundamentalkurven 6. Ordnung der Transformation. Man findet, daß den Ebenen σ , die Γ in einem Punkt A berühren, Flächen dritter Ordnung F' entsprechen, die Γ'

enthalten und einen im allgemeinen konischen Doppelpunkt A' aufweisen; dieser liegt auf derjenigen Trisekante von Γ' , die dem Punkt A entspricht. Der Doppelpunkt A' wird biplanar, entweder wenn σ eine der drei von A ausgehenden Trisekanten von Γ enthält (und dann liegt A' auf Γ') oder wenn σ die Kurve Γ in A oskuliert. Ist A ein Hyperoskulationspunkt von Γ , so liegt die singuläre Gerade des Doppelpunktes A' auf der entsprechenden Fläche F' . *E. G. Togliatti (Genova).*

Jongmans, F.: *Étude sur le genre linéaire des surfaces algébriques.* Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 470—483 (1949).

Die Frage des kleinstmöglichen Wertes des linearen Geschlechts $p^{(1)}$ einer algebraischen Fläche ist schon viel studiert worden. Wenn F zunächst einer Regelfläche nicht birational äquivalent ist, so ist $p^{(1)} \geq 1$. M. Noether und G. Castelnuovo haben die Grenzen: $p^{(1)} \geq 2p_g - 3$; $p^{(1)} \geq 3p_g - 6$ angegeben. Verf., welcher die Gültigkeitsbedingungen der Grenze von Castelnuovo schon ausgedehnt hatte, hat auch die andere Grenze $p^{(1)} \geq 4p_g - p_a - 6$ angegeben. Andererseits hat Nollet die Grenze $p^{(1)} \geq 3p_a$ bekannt gemacht. Alle diese verschiedenen unteren Grenzen für $p^{(1)}$ haben ihre Gültigkeitsbedingungen, die sich miteinander nicht überdecken. — In der vorliegenden Untersuchung findet vor allem Verf. die neue Grenze $p^{(1)} \geq 2p_a + p_g$, die besser als diejenige von Nollet ist und die unter denselben Voraussetzungen gilt. Im Beweis spielt eine wichtige Rolle die Betrachtung des kanonischen Systems $|K|$ und der parakanonischen Systeme von F ; die neue Ungleichung gilt für jede irreguläre Fläche, die keiner Regelfläche birational äquivalent ist, und unter der Voraussetzung, daß $|K|$, falls es unendlich ist, frei von mehrfachen Basispunkten und von festen nicht exceptionellen Kurven ist. Es gibt einige Ausnahmefälle. — Zweitens beweist Verf. durch alleinige Betrachtung der charakteristischen Schar von $|K|$, daß die Ungleichung $p^{(1)} \geq 4p_g - p_a - 6$ mit denselben obengenannten Bedingungen (und auch für reguläre Flächen) gültig ist, mit einigen Ausnahmefällen, deren vollständiges Verzeichnis angegeben wird; diese Ausnahmen beziehen sich auf Flächen, für welche $|K|$ entweder mit einem Büschel oder mit einer Involution 2., 3. oder 4. Ordnung zusammengesetzt ist. *E. G. Togliatti (Genova).*

Burniat, Pol: *Surfaces canoniques quadruples.* Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 34, 877—891 (1948).

L'A complète une note précédente et obtient l'énoncé suivant: Désignons par R une réglée rationnelle normale de l'espace $S_{2\varrho+1}$ à $2\varrho+1$ dimensions, image projective d'un système linéaire complet de courbes $C_{\varrho+1}(O, O_1)$ d'un plan \bar{w} , O et O_1 étant deux points propres. Aux droites $C_1(O)$, $C_1(O_1)$, OO_1 de \bar{w} correspondent les génératrices c^0 , les directrices c^0_ϱ d'ordre ϱ d'un faisceau et un point P de R . Les surfaces quadruples abéliennes $4R$ de support R^0 et de courbes de diramation

$$\begin{aligned} \Phi^0 &\equiv 2\varrho c^0 + 2c^0_2 \text{ et } \Psi^0 \equiv 2c^0 + 4c^0_1; & \Phi^0 &\equiv (2\varrho + 2)c^0 + 2c^0_1 \text{ et } \Psi^0 \equiv 2c^0 + 4c^0_1; \\ \Phi^0 &\equiv (2\varrho + 2)c^0 + 2c^0_2 \text{ et } \Psi^0 \equiv 4c^0_1; & \Phi^0 &\equiv (2\varrho + 4)c^0 + 2c^0_1 \text{ et } \Psi^0 \equiv 4c^0_1 \end{aligned}$$

sont canoniques normales et birationnellement identiques aux surfaces F étudiées précédemment, si c^0_2 désigne une courbe de R homologue à une droite générique de w . Les courbes de diramation en question sont découpées sur R par des hypersurfaces Φ_4 et Ψ_4 d'ordre 4 satisfaisant à certaines conditions de contact avec R . Si $(X_1, X_2, \dots, X_{2\varrho+1})$ est un point de R et $\Phi_4(X) \equiv \Phi_4(X_1, \dots, X_{2\varrho+1}) = 0$, $\Psi_4(X) \equiv \Psi_4(X_1, \dots, X_{2\varrho+1}) = 0$, les couples d'hypersurfaces d'ordre 4 en question, les surfaces canoniques normales dont nous nous occupons correspondent à un domaine de rationalité $\{X_1, X_2, \dots, X_{2\varrho+1}, \sqrt{\Phi_1}, \sqrt{\Psi_1}\}$. *B. Gambier (Paris).*

Differentialgeometrie in euklidischen Räumen:

Pedrazzini, Pierino: *Sulla curva di inseguimento di una curva a doppia curvatura.* Periodico Mat., IV. S. 27, 99—103 (1949).

Lagrange, René: Sur les congruences de cercles du plan. Bull. Sci. math., II. S. 71, 82—104 (1947).

In einer Kurvenkongruenz der euklidischen Ebene werden die Scharen von Kurven gesucht, die eine Berührung höherer als 1. Ordnung mit ihrer Einhüllenden haben. Jede solche Enveloppe heißt eine Fokalkurve der Kongruenz; ihre Gesamtheit bildet im allgemeinen eine Schar. Die Fokalkurven speziell einer Kreiskongruenz sind demnach dadurch gekennzeichnet, daß ihre Krümmungskreise der Kongruenz angehören. Im allgemeinen berührt jeder Kongruenzkreis zwei der Fokalkurven in seinen sog. Fokalpunkten; diese fallen auf jedem Kreis der als singulär bezeichneten Kreiskongruenzen, die vollständig ermittelt werden, zusammen. — Die Theorie wird angewandt auf die Kongruenz der Krümmungskreise der Integralkurven einer Differentialgleichung 1. Ordnung. Diese Kreise sind stets zugleich die Krümmungskreise einer zweiten Schar von Kurven; es wird gezeigt, wie sich deren Differentialgleichung aus der ersten Differentialgleichung ableiten läßt. Schließlich folgen Anwendungen auf die Krümmungskreise spezieller Kurvenscharen: auf die einer Schar ähnlich gelegener Kurven, konfokaler Mittelpunktskegelschnitte und gewisser zyklischer Kurven, ferner auf die der Lösungsschar einer Lagrangeschen Differentialgleichung und einer isothermen Kurvenschar; im letzteren Fall sind die Kurven der zweiten Schar auch isotherm. — Immer wieder ergeben sich im Verlauf der Untersuchung wesentliche geometrische Einsichten. *Löbell* (München).

Vidal Abascal, E.: Verallgemeinerung des Begriffs Parallelkurve auf einer Fläche. Länge und Flächenmaß einer solchen Linie. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 7, 269—278 (1947) [Spanisch].

Trägt man auf einer Fläche F von den Punkten einer Linie $v = 0$ nur unter einem festen Winkel ω geodätische Bogen von fester Länge ϱ ab, so beschreibt der Endpunkt dieses Bogens eine verallgemeinerte Parallellinie zur Linie $v = 0$. Es werden durch verwickelte Rechnungen Ergebnisse von Steiner, Bol und Santaló auf diesen verallgemeinerten Parallelismus übertragen. *W. Blaschke* (Hamburg).

Vidal Abascal, E.: Flächenmaß, das von einem geodätischen Bogen auf einer Fläche überstrichen wird, wenn sein Anfangspunkt eine feste Kurve durchläuft, und Länge der vom zweiten Ende beschriebenen Linie. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 7, 132—142 (1947) [Spanisch].

Es wird eine Schar geodätischer Bogen $u = \text{fest}$ auf einer Fläche $x(u, v)$ betrachtet, die von der Linie $v = 0$ unter dem Winkel $\omega(u)$ auslaufen. Es wird zunächst eine Formel für das von diesem Bogen überstrichene Flächenmaß angegeben und auf den Sonderfall angewandt, daß die Fläche festes Krümmungsmaß K besitzt. Dadurch wird eine von L. A. Santaló [Math. Notae, Rosario 4, 213—226 (1944)] angegebene Formel wiedergefunden. Weiter ergibt sich für $K = \text{fest}$, $\omega = \text{fest}$ ein merkwürdiges Ergebnis. Schließlich folgen Verallgemeinerungen bekannter Sätze über die Länge der Kurve $v = v(u)$. *W. Blaschke* (Hamburg).

Lalan, Victor: Sur les vecteurs indicatifs d'un réseau quelconque tracé sur une surface. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 294—296 (1949).

Legt man auf einer Fläche ein beliebiges, nicht notwendig orthogonales, Kurvennetz mit den Tangentenvektoren λ, μ zugrunde, so nehmen die Strukturgleichungen von E. Cartan (Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris 1945, p. 122) die Gestalt an: $d\omega^1 = r[\omega^1\omega^2]$, $d\omega^2 = -s[\omega^1\omega^2]$. Verf. definiert „les indicatifs, premier et second“, P, Q durch $P = r\lambda - s\mu$; $s = Q\lambda$, $r = Q\mu$, berechnet die Komponenten von P, Q und zieht einige naheliegende Folgerungen. *H. Gericke* (Freiburg).

Mishra, R. S.: Five families of ruled surfaces through a line of a rectilinear congruence. J. Indian math. Soc., n. S. 13, 81—84 (1949).

In der Euklidischen Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen im R_3 wurde bereits durch Kummer [J. reine angew. Math. 57, 189—230 (1860)] von zwei

binären Differentialformen $f = f_{ik} du^i du^k$ und $\varphi = \varphi_{ik} du^i du^k$ Gebrauch gemacht. Verf. berechnet die Überschiebungen $g = (f, \varphi)^{(1)}$ sowie $(f, g)^{(1)}$ und $(\varphi, g)^{(1)}$ und gibt die geometrische Deutung dieser Kovarianten. Weitzenböck (Overveen).

Pogorelov, A. V.: Über die Regularität konvexer Flächen mit regulärer Metrik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 1051—1053 (1949) [Russisch].

Verf. nennt eine konvexe Fläche F s -fach regulär, wenn in der Umgebung jedes Punktes von F Koordinaten u und v eingeführt werden können, so daß die Koordinaten des zu einem variablen Punkt der Fläche F führenden Radiusvektors s -fach differenzierbare Funktionen von u und v sind. Die folgenden Sätze werden bewiesen: 1. Wenn auf einer geschlossenen konvexen Fläche F in der Umgebung jedes Punktes Koordinaten u und v eingeführt werden können, so daß die Koeffizienten des Linienelementes k -fach differenzierbare Funktionen von u und v sind ($k \geq 12$), so ist F $(k-5)$ -fach regulär. Aus Satz 1 folgert Verf., daß, wenn die Koeffizienten des Linienelementes analytische Funktionen sind, auch die Fläche selbst analytisch ist. 2. Wenn im Gebiet G der Oberfläche der Kugel eine Metrik M gegeben ist mit der Eigenschaft, daß in der Umgebung jedes Punktes von G Koordinaten u und v eingeführt werden können, so daß die Koeffizienten des Linienelementes der Metrik M sowie die des natürlichen Linienelementes der Kugeloberfläche k -fach differenzierbare Funktionen von u und v sind, so hat jeder Punkt von G eine Umgebung U mit der Eigenschaft, daß die Metrik M in U durch eine $(k-5)$ -fach reguläre konvexe Fläche realisiert werden kann, vorausgesetzt, daß $k \geq 12$.

A. Rényi (Budapest).

Pogorelov, A. V.: Über konvexe Flächen mit regulärer Metrik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 791—794 (1949) [Russisch].

La Note démontre diverses propositions sur les surfaces convexes à métrique régulière et, en particulier, sur leur déformation; on utilise (sans indiquer de référence) un théorème de A. D. Alexandrov sur le „collage“ par leur bord commun de deux surfaces quelconques; d'autre part l'A. semble ignorer les résultats obtenus par H. Weyl [Vjschr. Naturforsch. Ges. Zürich 61, 40—72 (1916)] et obtient divers résultats qui semblent en désaccord avec ceux d'H. Weyl. L'A. donne les énoncés suivants: Théorème 1. Si une surface a une métrique régulière et est convexe avec courbure de Gauss positive, elle est régulière; si sa métrique est différentiable k fois ($k \geq 5$), la surface est différentiable au moins $(k-2)$ fois. Si la métrique est analytique, la surface est analytique. Théorème 2. Si la surface convexe F est k fois ($k \geq 5$) différentiable et a une courbure positive, toute surface applicable sur F est différentiable au moins $(k-3)$ fois. Si la surface F est analytique, toute surface convexe isométrique à F est analytique. Théorème 3. Si dans un domaine du plan u, v on donne une métrique régulière définie par $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$ chaque point (u_0, v_0) du domaine G admet un voisinage dans lequel on peut réaliser la métrique donnée par une certaine surface convexe régulière; si les coefficients E, F, G sont différentiables k fois ($k \geq 5$), le rayon vecteur de la surface est différentiable au moins $(k-2)$ fois. Théorème 4. Si F_1 et F_2 sont deux surfaces convexes à métrique régulière, différentiable k fois ($k \geq 5$) et à courbure positive, et si O_1, O_2 sont deux points correspondants dans cette isométrie, tout environ suffisamment petit ω_1 du point O_1 sur la surface F_1 peut être déformé d'une façon continue en l'environ correspondant par isométrie ω_2 du point O_2 et pendant tout le temps de la déformation la surface ω_1 sera dérivable au moins $(k-2)$ fois. En particulier si F_1 est analytique, la déformation sera analytique. Théorème 5. Soit \bar{F} une calotte convexe régulière (calotte signifie surface convexe terminée par un bord plan), de métrique définie par $ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$, dont on appelle $r(u, v)$ le rayon vecteur; on peut définir une limite supérieure du module des dérivées de la fonction $r(u, v)$, et cette limite ne dépend que de la limite supérieure du module des dérivées des fonctions E, F, G sur F jusqu'au quatrième ordre, que

du maximum de la fonction $1/K(u, v)$, où $K(u, v)$ est la courbure de Gauss et que de la distance du point où l'on calcule les deux dérivées en jeu à la frontière plane de la calotte \bar{F} . — L'A. s'est servi des idées de S. H. Bernstein en modifiant quelque peu la méthode de la fonction auxiliaire de ce géomètre.

B. Gambier (Paris).

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Bompiani, Enrico: Tessuti di curve piane e corrispondenze fra piani. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 7—12 (1949).

n Kurvenscharen $y'_i = f_i(x, y)$; $i = 1, 2, \dots, n$ bestimmen ein n -Gewebe in der x, y -Ebene [Blaschke, Bol. Geometrie der Gewebe, Berlin 1938; dies. Zbl. 20, 67]. Die Schnittpunkte der Geraden durch x, y mit der Richtung y'_i und durch $x + dx, y + dy$ mit der Richtung $y'_i + dy'_i$ bestimmen eine Projektivität zwischen den Punkten der ersten Geraden und den Richtungen $dy:dx$. Es wird zu einem n -Gewebe ein „assoziertes“ $(3n-3)$ -Gewebe eingeführt. Zu einer (genügend regulären) Abbildung $x^* = x^*(x, y)$, $y^* = y^*(x, y)$ gehört ein 3-Gewebe, das mit der Abbildung projektiv invariant verbunden ist und von den Geraden durch x, y berührt wird, die bis auf Glieder 2. Ordnung wieder in Geraden durch x^*, y^* übergehen. Anwendung der früheren Überlegungen auf solche 3-Gewebe in Zusammenhang mit Untersuchungen von M. Villa. Blaschke.

Haack, Wolfgang: Die kubische Indikatrix eines Strahlensystems und ihre Entartungen. Arch. Math., Karlsruhe 1, 445—461 (1949).

Pour étudier le voisinage d'ordre 2 du rayon A d'une congruence rectiligne a , on considère les réglées de a contenant A ; le voisinage d'ordre 2 d'une réglée est déterminé par les reguli (semi-quadriques) osculatrices. Le lieu géométrique des centres des reguli osculateurs aux réglées passant par A est un cône C cubique unicursal dont le sommet est le point central de la congruence; or, dans une congruence, les deux formes fondamentales sont du premier ordre (au lieu du second pour une surface) de sorte que les centres des reguli osculateurs dépendent des dérivées du premier ordre des tenseurs fondamentaux. La courbe Γ à l'infini de C , ou indicatrice de la congruence, est définie en égalant à zéro une forme cubique; le point à l'infini de A est le point double de Γ et les tangentes en ce point sont les traces sur le plan de l'infini des plans focaux de A , réelles ou imaginaires suivant que le rayon A est hyperbolique ou elliptique; si le rayon A est rayon parabolique isolé d'une congruence non parabolique, Γ offre un rebroussement. Dans le cas général, chaque point de C est centre d'un regulus osculateur, mais, dans les cas de décomposition de C , il n'y a que les portions de C distinctes d'un plan focal qui contiennent les centres de regulus. Cette dégénérescence se produit dans les cas suivants: si l'une des surfaces focales est développable, Γ dégénère en une conique et une droite (quelconque vis à vis de la conique si la congruence n'est pas parabolique; la droite touche la conique si la congruence est parabolique). Si les deux surfaces focales sont développables, l'indicatrice dégénère en trois droites; plus particulièrement, pour une congruence rectiligne linéaire, Γ se compose de trois droites obtenues ainsi: soient P, Q , les directrices (réelles ou non) de la congruence; l'une des droites joint les points à l'infini de P, Q , et les deux autres sont les traces sur le plan de l'infini des plans (A, P) , (A, Q) . Pour une congruence isotrope, l'indicatrice dégénère en trois droites dont deux sont imaginaires conjuguées et dont la troisième touche le cercle de l'infini, et réciproquement. B. Gambier (Paris).

Schouten, J. A.: Mesonenfelder und konforme Geometrie. Nederland. Akad. Wet., Verslag Afdeel. Natuurk. 58, 12—16 (1949) [Holländisch].

Vor ungefähr zwanzig Jahren hat sich die Unifizierung der Einsteinschen Gravitationstheorie und Maxwellschen Feldtheorie vollzogen. Es zeigte sich vor- teilhaft, jedenfalls im Lokalraum mit fünf Koordinaten zu arbeiten. Schouten und

van Dantzig beschrieben die Raumzeitwelt auch mit fünf homogenen Koordinaten. Die konforme Invarianz der elektromagnetischen Gleichungen wurde in keiner dieser Theorien benutzt, weil die fünfdimensionalen Theorien nicht konforminvariant sind. Der Umstand aber, daß die Geometrie des mit dem Spinraum verwandten R_6 auch mit der konformen Geometrie eines vierdimensionalen Raumes verknüpft ist, hat die Idee einer konforminvarianten Theorie wieder hervorgehoben. Schouten und Haantjes zeigten (1935), daß auch eine gekrümmte konform-einsteinsche X_4 eine gekrümmte projektive X_6 bestimmt. Damit war der mathematische Apparat für eine konforminvariante Feldtheorie vorhanden. Es fehlte nur noch die physikalische Größe für die sechste Ecke und Spalte des „Materietensors“. Es wird betont, daß verschiedene Untersuchungen darauf hinweisen, daß das Mesonenfeld diese Rolle spielen kann.

J. Haantjes (Leiden).

Angewandte Geometrie:

• Graf, U.: *Darstellende Geometrie. (Hochschulwissen in Einzeldarstellungen).* 5., verbesserte und erweiterte Aufl. Heidelberg: Quelle & Meyer 1949. 208 S. mit 340 Abb., DM 7,—.

• Steers, J. A.: *An introduction to the study of map projection.* 7th edition. London: University of London Press 1949. XXVII, 299 p., 18 s.

Dijkstra, D. W.: *Transformation of gnomograms and its application to the microchemical identification of crystals. I.* Proc. Akad. Wet., Amsterdam 52, 440—449 (1949).

Es werden Transformationen von gnomonischen Projektionen (Umwälzungen und solche speziellerer Art) beschrieben, wobei nicht der Kristall gegenüber der Projektionsebene gedreht wird, sondern die projizierenden Geraden bei festgehaltenem Kristall mit einer völlig beliebigen, anderen Ebene zum Schnitt gebracht werden.

W. Nowacki (Bern).

Schoenberg, Erich: *Die Methoden der Koinzidenzen zweier Sterne in Höhe bei Ortsbestimmungen aus der Luft und zur See.* S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München 1947, 139—154 (1949).

Im Flugzeug wird durch die Eigenbeschleunigung die Lotrichtung, d. h. das Zenit und damit die bei der astronomischen Ortsbestimmung gemessene Zenitdistanz scheinbar geändert. Wegen der großen Fluggeschwindigkeit soll die Dauer der Beobachtung und Auswertung auf 3 bis 4 Minuten verkürzt werden. Pewzow und Zinger beobachten 2 Sterne nacheinander (im Abstände von 5 bis 20 Minuten). Verf. beobachtet den Zeitpunkt der Koinzidenz in Höhe, indem der eine Stern unmittelbar gesichtet und der andere durch einen freihängenden Spiegel ins Gesichtsfeld gespiegelt wird. Eine andere Möglichkeit ist die Beobachtung durch ein kardanisch aufgehängtes Doppelfernrohr mit gemeinsamem Einblick. Wenn für jeden Breitengrad und jede 6 bis 8 Minuten geeignete Sternpaare vorausberechnet sind, dürfte die Auswertung längstens 1 Minute beanspruchen. Die Sternzeit gleicher Zenitdistanz wird mit τ bezeichnet. Aus dem nautischen 3-Eck folgt $\operatorname{tg} \varphi = m' \cos \{\tau - M\}$; m' und M hängen nur von den Koordinaten der Sterne ab. Wenn 2 Sterne die gleiche Höhe erreichen, erfolgt innerhalb von 24 Sternstunden eine 2. Koinzidenz, bei der die Sterne jedoch auch unter dem Horizont liegen können. Der durch eine Lotschwankung oder einen Ortszeitfehler verursachte Breitenfehler $\Delta\varphi = \cos \varphi \operatorname{ctg} \frac{1}{2} (a_1 + a_2) \Delta\tau$ wird 0, wenn die beiden Sterne symmetrisch zum 1. Vertikal liegen. Die Ortszeit wird vom Breitenfehler unabhängig, wenn die beiden Sterne symmetrisch zum Meridian liegen. Die Länge findet man aus der Gleichung $\lambda = \text{Greenw. Sternzeit} - \text{Ortssternzeit}$. Wenn die Azimute $\pi - a_1$ und a_2 sich um 12° unterscheiden, verursacht eine Lotabweichung von 1° einen Breitenfehler, der höchstens $\frac{1}{10}$ des Breitenfehlers bei direkter Höhenmessung beträgt. Die Trennung der Sternscheibchen sei merkbar, wenn sie sich in Höhe um $1'$ von einander entfernt haben. Mit $dh/dt = -\cos \varphi \sin a$ wird für die Polhöhe 51° die Zeit bis zur Trennung der Sterne mit den Azimuten 30° und $150^\circ 30'$ bzw. 30° und 100° berechnet. Diese Zeit ist 13,8 m bzw. 0,218 m. Dieser Zeitfehler verursacht den Breitenfehler $0,57'$ bzw. $0,96'$. Bei der Ortszeitbestimmung ist der Fehler

$$\Delta\tau = \frac{\sin \delta_1 - \sin \delta_2}{\sin a_1 - \sin a_2 \cos^2 \varphi \sin z} \Delta\varphi$$

am kleinsten, wenn die Azimute $= \pm 90^\circ$ sind. An der Universitäts-Sternwarte München wird ein Katalog von Sternpaaren vorbereitet. Er ist 10 Jahre gültig. Dann erfordern die Sternpräzessionen Berichtigungen.
Konrad Ludwig (Hannover).

Egger, H.: Ermittlung der Auflagerdrücke in ebenen, äußerlich einfach statisch unbestimmten Fachwerken. Z. angew. Math. Mech. **29**, 284—285 (1949).

Ein in 2 Knoten unverschieblich gelagertes ebenes Fachwerk ist äußerlich statisch unbestimmt. Die bekannte kinematische Methode auf Grund der Beziehung $\sum \mathfrak{P}_k \cdot \mathbf{v}_k = 0$ (Müller-Breslau) läßt sich für den Fall, daß nach Entfernung eines der festen Auflagerpunkte der Beweglichkeitsgrad 2 erhalten wird, wie Verf. zeigt, vereinfachen unter Benutzung des Eulerschen Satzes über die Zusammensetzung von Geschwindigkeiten ($\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{BC}$).
W. Meyer zur Capellen.

Klassische theoretische Physik.

Mechanik:

• Favre, Henry: Cours de mécanique. I: Statique. Paris: Dunod; Zürich: Leemann ^{Fres}, Editeurs 1946. 384 p.

Dieser erste Band des Werkes, die Statik enthaltend, gliedert sich, von einem einleitenden Kapitel abgesehen, in drei Teile: Statik der starren Körper, Statik der elastischen Körper und Hydrostatik. Der überwiegende erste Teil enthält in sieben Kapiteln den üblichen Stoff einer stark technisch orientierten Statik der Systeme starrer Körper, z. B. eine ziemlich ausführliche Statik der Fachwerke, aber auch das Gleichgewicht der Fäden und Seile. Der Reibung ist ein ganzes Kapitel gewidmet. Der zweite Teil behandelt in fünf Kapiteln hauptsächlich und ausführlich die Statik des Balkens, aber auch schon eine Einführung in die Elastizitätstheorie. Die Hydrostatik muß sich mit einem Kapitel begnügen, das nur die ersten Begriffe bringt.

Hamel (Landshut).

• Favre, Henry: Cours de mécanique. II: Dynamique des corps solides rigides. Paris: Dunod; Zürich: Leemann ^{Fres}, Editeurs 1947. 434 p.

Dieser zweite Band gliedert sich ebenfalls in drei Teile: Dynamik des materiellen Punktes, Dynamik des starren Körpers und Dynamik der Systeme. Die vier Kapitel des ersten Teiles enthalten die Kinematik des Punktes, die Dynamik des freien materiellen Punktes, die Begriffe Arbeit und Energie und die Dynamik des gebundenen Punktes. Der zweite Teil, ebenfalls vier Kapitel umfassend, bringt die Kinematik des starren Körpers, die Relativbewegung, die ebene Bewegung des starren Körpers und die Bewegung um einen festen Punkt. Die fünf Kapitel des letzten Teils beginnen mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten, behandeln dann im Anschluß an das Lagrangesche Prinzip die allgemeinen Sätze der Kinetik, die Lagrangeschen Gleichungen, das Einfachste über den Stoß und enden mit dem Hamiltonschen Prinzip und den kanonischen Gleichungen. Zum Schluß noch eine kurze Bemerkung über das Prinzip des kleinsten Zwanges. Der zweite Band stellt schon etwas höhere Anforderungen an den Leser als der erste Band, der aber auch schon von der Differential- und Integralrechnung ungescheut und angemessen Gebrauch macht.

Hamel (Landshut).

• Favre, Henry: Cours de mécanique. III. Chapitres choisis de mécanique. Paris: Dunod; Zürich: Leemann ^{Fres}, Editeurs 1949. 478 p.

In diesen dritten Band hat Verf. höhere Teile der Mechanik aufgenommen. Wieder gliedert der Band sich sachgemäß in drei Teile: Elastizitätstheorie, elastische Schwingungen und Hydrodynamik mit einem Anhang über die mechanische Ähnlichkeit. Der erste Teil bringt in drei Kapiteln die ebene Theorie, das Prinzip der virtuellen Arbeiten mit den Sätzen von Maxwell und Castigliano sowie die Biegung der ebenen Platten. Der zweite Teil, ebenfalls drei Kapitel umfassend, handelt von den transversalen Schwingungen der Seile, den Schwingungen der prismatischen Balken und den Schwingungen der Membrane und der Platten. Der dritte Teil ist diesmal der stärkere und behandelt in vier Kapiteln die grundlegenden Sätze und die Anwendungen der Theorie der vollkommenen Flüssigkeiten und eine Einführung in die Theorie der wirklichen, d. h. der zähen Flüssigkeiten. Im Schlußkapitel einiges über die mechanische Ähnlichkeit. — In diesem dritten Teil hat Ref. einige Dinge bemerkt, die man sonst nicht findet, wie z. B. die Methode von Schnyder-Bergeron zur schwingenden Saite und eine höhere Approximation zur Theorie der fortschreitenden Welle in einem Kanal von endlicher Tiefe. — Die Darstellung ist klar und, was die Strenge angeht, dem Charakter des Werkes angepaßt. Besonders wohltuend empfindet man die vielen genauen Zeichnungen, den schönen deutlichen Druck auf bestem Papier.

Hamel (Landshut).

●Meissner, E. und H. Ziegler: *Mechanik. Band I: Statik, 2. Aufl.; Band II: Dynamik.* Basel: Verlag Birkhäuser 1949. sfr. 36.—; 32.50.

Bilimovitch, Anton: *Sur la transformation canonique des équations du mouvement d'un système non holonome.* Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 2, 108—111 u. serbisch 112—115 (1948).

Ist das nichtholonome System durch die $n + k$ generellen Koordinaten $q_i, q_{n+\nu}$ ($i = 1, 2, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, k$) festgelegt und stellen die k Differentialgleichungen

$$q'_{n+\nu} = \sum_{i=1}^n a_{\nu i} q'_i + a_{\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, k)$$

($a_{\nu i}, a_{\nu}$ Funktionen aller q und von t) die Bedingungen dar, so lassen sich die Bewegungsgleichungen in der Form schreiben

$$Q_i + \sum_{\nu=1}^k Q_{n+\nu} a_{\nu i} + \sum_{\mu=1}^k \Theta_{\mu} \left[\frac{da_{\mu i}}{dt} - \frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q_i} - \sum_{\nu=1}^k \frac{\partial q'_{n+\mu}}{\partial q_{n+\nu}} a_{\nu i} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Hier ist Θ die kinetische Energie T , ausgedrückt durch die unabhängigen Geschwindigkeiten q'_i ($i = 1, \dots, n$). Die Q stellen die generellen Kräfte dar und Θ_{μ} die Ableitungen $\partial T / \partial q'_{n+\mu}$, nachdem die abhängigen Geschwindigkeiten eliminiert sind. — Es wird nun gezeigt, wie man von diesen „Lagrangegleichungen“ zu entsprechenden Hamiltongleichungen übergeht, und es werden die Bedingungen für die zugehörigen, kanonischen Transformationen aufgestellt. Verf. weist darauf hin, daß diese von ihm bereits 1914 (C. r. Acad. Sci., Paris 158, 1064—1068) gefundenen Ergebnisse im wesentlichen übereinstimmen mit den Ergebnissen von M. S. Luigi Marchetti [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, II. S. 10, 199—208 (1941); dies. Zbl. 26, 365].

Hardtwig (München).

Haag, Jules: *Sur la synchronisation des systèmes à plusieurs degrés de liberté.* Ann. sci. École norm. sup., III. S. 64, 285—338 (1947).

Diese umfangreiche, weitreichende Arbeit, die das Ziel hat, die Mechanik der Uhren, ihrer Auslösung und Synchronisation zu fördern, kann hier nur kurz in ihrem mathematischen Teil besprochen werden. Sie stützt sich auf das Theorem, daß das System von Differentialgleichungen $dx_i/dt = \lambda f_i(x, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) bei hinreichend kleinem konstanten λ eine periodische Lösung hat, wenn erstens die f in t die Periode T haben, zweitens gewisse Regularitätsbedingungen erfüllen, drittens die Gleichungen $dx_i/dt = \lambda F_i(x)$, wo die F die über eine Periode gemittelten f sind, eine konstante Lösung haben, also einen Punkt P bestimmen und viertens die zum zweiten System zugehörigen Stabilitätsgleichungen Wurzeln mit negativem Realteil haben. Die periodische Bewegung bleibt in der Nähe von P . Die Anwendungen sind sehr zahlreich, betreffen alle Arten von Störungen, z. B. den Einfluß, den es auf den Gang einer Uhr hat, wenn man sie auf eine Platte legt, die bei bifilarer Aufhängung schwingt, oder wenn man die Uhr an einem Nagel aufhängt, wobei sie ja selbst in Schwingungen gerät.

Hamel (Landshut).

Magenes, Enrico: *Una questione di stabilità relativa ad un problema di moto centrale a massa variabile.* Comment. Pontificia Acad. Sci. 12, 229—259 (1948).

Im Anschluß an mehrere Untersuchungen von G. Armellini, insbesondere: Acta Pontificia Acad. Sci. 4, 387—397 (1942), in welcher Armellini die Stabilität der Bewegung einer Punktmasse untersucht, welche von einem festen Zentrum mit veränderlicher Masse angezogen wird, behandelt Verf. die allgemeinere Bewegungsgleichung $r'' = c^2/r^k - f(r)M(t)$ ($k \geq 1$). (Die von Armellini untersuchte Gleichung entspricht $k = 3$). Unter einer Reihe von Voraussetzungen, welche die Stetigkeit und Differenzierbarkeit, sowie das Verhalten für $r = 0$, beliebiges positives r und für $r = \infty$ der Funktionen $f(r)$ und $M(t)$ betreffen, weist Verf. nach,

daß nicht nur für $k = 3$, sondern für jedes positive $k > 1$ der Abstand r der Punktmasse vom Zentrum bei unbegrenzt wachsender Zeit gegen Null konvergiert.
H. Neuber (Dresden).

Emersleben, O.: Die Schwingungsdauer eines umlaufenden Pendels als Analogon zum Potential eines Kreises. Z. angew. Math. Mech. 29, 279—282 (1949).

Es wird die Schwingungsdauer bzw. Periode eines schwingenden und umlaufenden mathematischen Pendels mit dem Grenzfall der aperiodischen Bewegung näher untersucht, und es ergeben sich zu deren Darstellung Formeln, in denen vollständige elliptische Integrale auftreten. Die gleichen Integrale treten aber auch als Faktoren bei der Berechnung des elektrostatischen Potentials eines geladenen Kreises auf, so daß sich einige überraschende, formale Übereinstimmungen ergeben.
W. Meyer zur Capellen (Aachen).

Meissner, Walther: Erweiterung der Sommerfeldschen Arbeiten über Resonanzwirkungen bei Schraubenfedern. Z. Naturforsch. 3a, 546—548 (1948).

Es werden Schraubenfedern, die Drehschwingungen, Vertikalschwingungen und Pendelschwingungen ausführen können, in dem einfacheren Fall, daß eine der Kopplungen zwischen diesen drei Schwingungsarten Null ist, experimentell und theoretisch untersucht, wobei Dämpfungen vernachlässigt werden. Es tritt hier bei zwei von den drei Schwingungsarten der Fall auf, daß die Energie für einen Moment völlig in diese wandert.
Collatz (Hannover).

Rubbert, Friedrich Karl: Direkte Integration des Zweikörperproblems. Astron. Nachr. 277, 238—240 (1949).

Verf. transformiert die übliche Form der Differentialgleichung des Zweikörperproblems in

$$(*) \quad W''' + e(WW'' - 2W'^2) + (1 + \kappa)W(1 + eW)^5 = 0.$$

Hier ist $W = \cos w$, w = wahre Anomalie, e = num. Exzentrizität, $\tau = 2\pi t T^{-1} (1 - e^2)^{-3/2} (1 + \kappa)^{-1/2}$, T = Umlaufzeit, κ = eine passend zu bestimmende Konstante und ' bedeutet Ableitung nach τ . Wird die Lösung von (*) in der Form einer nach Potenzen von e fortschreitenden Reihe angesetzt, so ergeben sich in dritter Näherung sowohl für $W(\tau)$, als auch für den Abstand $r(\tau)$ trigonometrische Polynome 3-ter Ordnung, welche im Falle $e \ll 1$ praktisch genügende Annäherung geben.
Egerváry (Budapest).

Batyrev, A. A.: Über Trajektorienformen im Zweikörperproblem mit veränderlichen Massen. Akad. Nauk. SSSR, Astron. Ž. 26, 56—59 (1949) [Russisch].

Zwei Körper, deren Massensumme nach dem Gesetz $M = M_0/(1 + \alpha t)$ mit der Zeit veränderlich sei, für $\alpha > 0$ also abnehme, bewegen sich nach dem Newtonschen Gesetz. In diesem Falle lassen sich die Bahnformen vollständig diskutieren. Bezeichnet man nämlich die rechtwinkligen ebenen Relativkoordinaten des zweiten Körpers (Planet) mit x, y und benutzt die Transformation

$$\xi = \frac{x}{1 + \alpha t}, \quad \eta = \frac{y}{1 + \alpha t}; \quad \tau = \frac{1}{\alpha(1 + \alpha t)},$$

so führt der Newtonsche Kräfteansatz auf die Differentialgleichungen

$$\ddot{\xi} + \frac{\xi}{\varrho^3} = 0, \quad \ddot{\eta} + \frac{\eta}{\varrho^3} = 0; \quad \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

also auf die Bewegungsgleichungen des Zweikörperproblems mit konstanten Massen. Jeder Keplerbahn im ξ, η, τ -Gebiet entspricht also eine Bahn im x, y, t -Gebiet, deren Gestalt durch Transformation der bekannten Formeln der Zweikörperbewegung auf die neuen Variablen leicht diskutierbar ist. Verf. führt die Diskussion in groben Umrissen für den elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Fall durch. Es ergeben sich (im elliptischen Fall ausgesprochen spiralförmige) Bahnen, die stets asymptotisch ins Unendliche verlaufen.
K. Stumpff (Vogelsang/Harz).

Elastizität. Plastizität. Akustik:

● **Schüepp, H.:** Spannung und Spannungstensor. (Beihefte zu: Elemente der Mathematik, Nr. 1). Basel: Verlag Birkhäuser 1947. 24 S. u. 25 Fig., fr. 3.—.

„Wir müssen den Begriff der Spannung einführen. Es ist ein in der Lehrbuchliteratur weit verbreiteter Fehler, daß man über diesen Punkt möglichst unvermerkt hinweggleitet, ...“ In einer dem reiferen Schüler angepaßten Form werden Spannung und Spannungstensor anschaulich als neue Bilder im Sinne von Hertz eingeführt. Endlich geschieht also das, wofür Ref. seit mehr als vierzig Jahren eintritt.

Hamel (Landshut).

Locatelli, P.: Spunti di meccanica analitica nella dinamica delle costruzioni. Rend. Sem. mat. fisic. Milano 18, 124—139 (1948).

Die Hauptsätze der analytischen Mechanik, nämlich die Lagrangeschen Gleichungen, die von Hamilton, und Jacobis partielle Differentialgleichung werden in einigen Fällen kontinuierlicher Systeme, nämlich für den längsschwingenden Faden, den querschwingenden Balken und den allgemeinen elastischen Körper als richtig nachgewiesen, weil sie das jeweils richtige Ergebnis haben.

Hamel (Landshut).

Rachkovitch, Daniel: Le potentiel d'un corps élastique sous forme diadique. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 1, 136—142 (1947).

Herleitung bekannter Beziehungen für die Formänderungsenergie des elastischen Körpers in Dyadenschreibweise.

H. Neuber (Dresden).

Diaz, J. B. and H. J. Greenberg: Upper and lower bounds for the solution of the first boundary value problem of elasticity. Quart. appl. Math. 6, 326—331 (1948).

Vengono date formule di maggiorazione, della cui efficacia si può dubitare, per la soluzione del primo problema fondamentale della statica elastica. — Una errata interpretazione del potenziale delle deformazioni elastiche conduce — nel § 4 della Nota — alla conclusione che gli unici possibili spostamenti rigidi di un corpo sono le traslazioni.

Gaetano Fichera (Roma).

Arf, Cahit: Sur l'existence de la solution d'un problème d'élasticité. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul A 14, 75—85 und türkische Zusammenfassung 75 (1949).

In einer früheren Arbeit des Verf. (s. dies. Zbl. 29, 375] wurde das Problem gestellt, die Begrenzung eines ebenen Bereiches zu ermitteln, wenn der Bereich an den Zweigen, die sich ins Unendliche erstrecken, konstanten Belastungen unterworfen wird so, daß im Gleichgewicht die Spannungsverteilung einem gegebenen Kräftesystem äquivalent ist und so beschaffen ist, daß an den kräftefreien Rändern des Bereiches die Spannung $\sigma_x + \sigma_y$ konstant ist. Dies führt auf das mathematische Problem [nach Berichtigung eines Fehlers in der alten Formel (l. c.) S. 337, Gleichung (7, 12)], reelle Zahlen β_i mit $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{n-1} < 0$ zu finden, als Lösung des Systems

$$\sum_{i \neq n} f_i \sin(\varphi_i - \varphi_j) \ln |\beta_i| - \sum_{i \neq j} f_i \sin(\varphi_i - \varphi_j) \ln |\beta_j - \beta_i| \\ = \pi \left\{ \sum_{i=j+1}^n f_i \cos(\varphi_i - \varphi_j) - \frac{f_n}{2} \cos(\varphi_n - \varphi_j) + \frac{f_j}{2} \right\} + \delta_j \quad (j = 1, 2, \dots, n-1),$$

wobei die φ_i , δ_i , f_i gegebene reelle Zahlen sind, die den Bedingungen genügen:

$$0 = \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \dots \leq \varphi_n = 2\pi,$$

$$\varphi_1 < \pi, \dots, \varphi_{j+1} - \varphi_j < \pi, \dots, 2\pi - \varphi_{n-1} < \pi$$

$$\delta_{j+1} - \delta_j - \frac{\pi}{2} (f_j + f_{j+1}) > 0 \quad \text{für} \quad \varphi_{j+1} = \varphi_j$$

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} f_i e^{i\varphi_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} f_i \delta_i = 0.$$

Die Lösung gelingt durch Zurückführung auf ein äquivalentes Problem mit Unbekannten x_i statt β_i und mit Parametern Δ_i statt δ_i , die einfacheren Bedingungen genügen. Die Existenz der gesuchten Lösung ergibt sich aus einer reellen Hilfsfunktion der $(n-1)$ reellen Variablen x_1, \dots, x_{n-1} ; die Stelle ihres Maximums stellt

eine gesuchte Lösung dar, die nicht eindeutig bestimmt zu sein braucht. Für $n = 2, 3$ ist die Lösung eindeutig bestimmt und mit direkten Methoden zu gewinnen.

Moufang (Frankfurt a. M.).

Sen, Bibhutibhusan: Note on the deformation produced by some symmetrical distribution of variable loads on the plane boundary of a semi-infinite elastic solid. *Bull. Calcutta math. Soc.* **41**, 77—82 (1949).

Das Problem der über eine Kreisfläche gleichmäßig verteilten Belastung auf einem unendlichen elastischen Halbraum wurde bereits 1885 von J. Boussinesq gelöst. Eine vollständige Diskussion des Problems sowie die Lösung bei einer über eine Rechteckfläche gleichmäßig verteilten Last wurde von K. Terzawa [*Philos. Trans. R. Soc. London, A* **217**, 35—50 (1916)] und A. E. H. Love [ebenda **228**, 377—423 (1929)] gegeben, der außerdem die Lösung bei einer nach dem Gesetz $p = p_0(1 - r^2/a^2)^{\frac{1}{2}}$ veränderlichen Belastung entwickelte, wo a den Halbmesser der belasteten Kreisfläche und r die Entfernung vom Lastmittelpunkt bezeichnen. — In der vorliegenden Arbeit wird zunächst ein Abriß eines allgemeinen Verfahrens zur Lösung von Aufgaben der genannten Art erörtert. Danach wird die parabolische Verteilung, d. h. eine Verteilung der Last über eine Kreisfläche vom Radius a nach dem Gesetz $p = p_0(1 - r^2/a^2)$ im einzelnen untersucht. Zum Schluß werden die Ergebnisse der Lösungen bei Lastverteilungen nach Exponentialgesetzen kurz angegeben.

Gran Olsson (Trondheim)

Tanrikulu, Mahmut: Ordinary zero places in a body under plane stress. **11**. (End). *Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul A* **13**, 246—302 (1948).

Die Differentialgleichung der Spannungslinien eines Spannungszustandes in der x - y -Ebene ist von der Form

$$y'/(1 - y'^2) = P(x, y)/Q(x, y).$$

Der Punkt $x = 0, y = 0$ wird als eine gewöhnliche Nullstelle n -ter Ordnung bezeichnet, wenn P und Q homogene Polygone n -ten Grades sind. In § 2 dieser Arbeit wurden (dies. Zbl. **30**, 376) die Nullstellen erster Ordnung durch direkte Integration der entsprechenden Differentialgleichung untersucht. Im § 3, der jetzt vorliegt, werden die Nullstellen höherer Ordnung durch Einführung von Polarkoordinaten untersucht. Dabei werden einige Theoreme verwendet, die von R. v. Mises, W. Prager, L. Föppl u. a. herrühren. Zahlreiche Schaubilder zur Darstellung der möglichen Singularitäten werden angegeben.

T. Pöschl.

Conway, H. D.: Note on the bending of circular plates of variable thickness. *J. appl. Mech.*, New York **16**, 209—210 (1949).

In einer früheren Arbeit [*J. appl. Mech.*, New York **15**, 1—6 (1948)] gab Verf. die (bereits bekannte) Lösung der symmetrisch belasteten Kreisplatte mit zentrischer Bohrung, wobei die Dicke der Platte in jedem Schnitt der Entfernung vom Kreismittelpunkt proportional ist. Die vorliegende Note enthält Lösungen bei einer Variation der Plattensteifigkeit nach dem Gesetz $D = D_0 r^m$, wo D_0 und m konstante Beiwerte und r die Entfernung vom Mittelpunkt bedeuten. — Lösungen der rotationssymmetrisch belasteten Kreisplatte von der oben angenommenen Steifigkeit sind bereits von H. Holzer [*Z. Turbinenwesen* **15**, 21 (1918)] angegeben. Für den Sonderfall $m = 3$ gleich der in der ersten Note angenommenen Veränderlichkeit der Plattendicke, vgl. z. B. den Dresdener Vortrag des Ref. [*Z. angew. Math. Mech.* **16**, 347—348 (1936)].

Gran Olsson (Trondheim).

Tarabasov, N. D.: Bestimmung der Spannungen in einer Platte mit einigen in sie eingepreßten kreisrunden Scheiben. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **63**, 15—18 (1948) [Russisch].

Der Spannungszustand in einer runden, an ihrem Umfang durch ebene Kräfte belasteten Platte mit einigen in sie eingepreßten kreisförmigen Scheiben gleicher Dicke und gleichen Materials wird mit Hilfe der funktionentheoretischen Methode

untersucht [s. Muschelišvili, Einige Aufgaben der Elastizitätstheorie, 1935 (russisch)]. Nach dieser Methode wird der Spannungszustand durch je zwei Funktionen komplexer Veränderlichen beschrieben, die in den entsprechenden Bereichen der Platte und der Scheiben regulär sind und die aus den Randbedingungen (Kräfte am äußeren Umfang der Platte und Verschiebungssprünge an den Grenzen zwischen den einzelnen Bereichen) bestimmt werden. Für eine am äußeren Umfang unbelastete Platte werden die Formeln für die Komponenten des Spannungszustandes angeschrieben und für einen Sonderfall ausgewertet. *A. Kromm (Berlin).*

Picone, Mauro: Sulla torsione di un prisma elastico cavo secondo la teoria di Saint-Venant. Ann. Soc. Polonaise Math. 20, 347—372 (1948).

Die Arbeit gibt eine vom mathematischen Standpunkt exakt formulierte Kennzeichnung des Saint-Venantschen Problems der Torsion eines hohlen prismatischen oder zylindrischen Körpers, bei dem die eingepprägten Momente auf den ebenen Grenzflächen übertragen werden, und seine allgemeine Auflösung. Das Problem wird zurückgeführt auf einen Bereich, der außen und innen durch Rechtecke begrenzt ist; es wird gezeigt, daß es von der Art der von Dini-Neumann für harmonische Funktionen in der Ebene behandelten mit bestimmten Randwerten auf der äußeren und inneren Begrenzung ist. Der Zweck dieser Arbeit ist der, die Existenz einer solchen harmonischen Funktion unter den beim Torsionsproblem auftretenden Bedingungen zu beweisen. *Th. Pöschl (Karlsruhe).*

Serman, D. I.: Über ein Torsionsproblem. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 63, 499—502 (1948) [Russisch].

Am Beispiel einer Aufgabe über die Torsion eines Hohlzylinders konstanten Querschnitts, der außen durch einen Kreis und innen durch eine Ellipse begrenzt ist, wird eine Lösungsmethode geschildert, die auch für die Behandlung ähnlicher Aufgaben der Elastizitätstheorie geeignet sein soll. Diese Methode bedient sich einer komplexen Torsionsfunktion und einer analytisch fortsetzbaren Hilfsfunktion, die außerhalb der Ellipse überall regulär ist und im Unendlichen verschwindet. Nach längerer Rechnung wird für die Torsionsfunktion eine Formel in Form einer Summe gewonnen, die den Grenzbedingungen am äußeren Rande exakt und am inneren Rand mit sehr großer Genauigkeit genügt. Die Durchrechnung der Schubspannungsverteilung für einen Sonderfall hat gezeigt, daß bereits drei Glieder in dem Summenausdruck für die Torsionfunktion eine ausreichende Genauigkeit gewährleisten. *A. Kromm (Berlin).*

Narodeckij, M. Z.: Über die Spannungen in einem inhomogenen Kreiszylinder. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 58, 1305—1308 (1947) [Russisch].

Es wird der ebene Spannungszustand in einem nicht homogenen Zylinder, der aus einem homogenen Vollzylinder und einem diesen umschließenden homogenen Hohlzylinder anderen Werkstoffs besteht, mit Hilfe der funktionentheoretischen Methode untersucht [s. Muschelišvili, Einige Aufgaben der Elastizitätstheorie, 1935 (russisch)]. Das Spannungs- und das Deformationsproblem wird danach auf die Ermittlung von vier analytischen Funktionen aus den Randbedingungen zurückgeführt, wobei je zwei dieser Funktionen in den beiden Bereichen regulär sein müssen. Da die Lösung dieser Aufgabe auf dem üblichen Wege durch Entwicklung der gesuchten Funktionen in Taylor- und Laurentreihen zu schlecht konvergierenden Reihen führt, wird hier ein anderes Verfahren vorgeschlagen. Dieses besteht im wesentlichen in der Entwicklung der gesuchten Funktionen in Reihen, die nach den Potenzen von Parametern geordnet sind, welche von den elastischen Eigenschaften der beiden Zylinder abhängen und für nicht stark voneinander abweichende Elastizitätsmodulen kleine Größen sind. An einem Beispiel eines Zylinders mit zwei konzentrischen Kräften am Außenmantel wird gezeigt, daß in diesem Fall der Spannungszustand sich von dem eines homogenen Zylinders nur wenig unterscheidet. *A. Kromm (Berlin).*

Ufljand, Ja. S.: Verdrehung eines prismatischen Stabes mit einem Profil, das von den Bögen zweier sich schneidender Kreise begrenzt wird. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 17—20 (1949) [Russisch].

Das Problem der Torsion eines prismatischen Stabes, dessen Querschnitt durch zwei sich überschneidende Kreisbögen begrenzt ist, wird mit Hilfe der Bipolarkoordinaten behandelt, die für diese Querschnittsform besonders geeignet sind. Es wird eine exakte Lösung dieses Problems gefunden, die zum Teil aus Integralen über eine Hilfsvariable von Funktionen dieser Variablen und der Bipolarkoordinaten besteht. Für die Sonderfälle eines Stabes mit halbkreisförmigem Querschnitt und einer Welle mit halbkreisförmiger Nut lassen sich die Quadraturen in geschlossener Form durchführen und es ergeben sich die schon früher von de Saint-Venant, Dinnik und C. Weber auf anderem Wege gefundenen Lösungen. Für einen Stab mit einem symmetrischen, durch zwei Kreisbögen begrenzten Querschnitt werden die Rechenergebnisse für die Torsionssteifigkeiten und die größten Schubspannungen in einer Tabelle in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel der Kreisbögen zusammengestellt.

A. Kromm (Berlin).

Birman, S. E.: Lösungen für dünnwandige Stäbe in Polynomen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 283—286 (1949) [Russisch].

Der Untersuchung der Torsion und Biegung von dünnwandigen prismatischen Stäben, die aus ebenen Plattenstreifen zusammengesetzt sind, wird die Ermittlung des ebenen Spannungszustandes in Plattenstreifen bei verschiedenen, für das vorliegende Hauptproblem geeignet gewählten Randbelastungen vorausgeschickt. Für diese Belastungen läßt sich die Lösung des ebenen Spannungsproblems durch Polynome vierten Grades in den rechtwinkligen Koordinaten der Plattenstreifen darstellen. Durch Superposition und Differentiation dieser Lösungen wird dann der Spannungszustand in einem tordierten prismatischen Kastenträger und in einem U-Profilstab mit Querkraftbiegung ermittelt. Für den letzteren wird auch der Schubmittelpunkt angegeben.

A. Kromm (Berlin).

Vlasow, V. Z.: Momentless theory of thin shells of revolution. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 397—408 und engl. Zusammenfassg. 408 (1947) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß die Gleichgewichtsbedingungen beliebiger Rotations-Membranschalen zweiter Ordnung und positiver Gaußscher Krümmung durch Einführen geeigneter neuer Unbekannten auf die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zurückgeführt werden. Anschließend werden verschiedene elliptische Voll- und Teilschalen, parabolische und hyperbolische Schalen (eine Hälfte des zweischaligen Hyperboloids) bei Belastung durch Einzel-Kräfte und Momente behandelt.

A. Kromm (Berlin).

Goldenweiser (Gol'denvejzer), A. L.: Momentless theory of shells whose middle surface is a curve of the second order. Priklad. Mat. Mech., Moskva 11, 285—290 und engl. Zusammenfassg. 290 (1947) [Russisch].

Mit Hilfe einfacher Umformungen wird gezeigt, daß die Lösung der statischen und geometrischen Aufgaben beliebiger Membranschalen zweiter Ordnung auf die Integration einer Poissonschen oder einer nicht homogenen Wellengleichung (bei positiver oder negativer Gaußscher Krümmung) zurückgeführt werden kann. Im Falle positiver Gaußscher Krümmung und einer Belastung durch Einzelkräfte gehen die statischen Gleichungen in die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen über. (Vgl. vorsteh. Referat.) Der Spannungszustand solcher Schalen wird dann durch den Real- und Imaginär-Teil einer analytischen Funktion dargestellt, die hier in Form einer Laurentreihe angesetzt wird und deren Singularitäten von der Lage des Lastangriffs abhängen. Die Schnitt-Kräfte und Momente errechnen sich aus den Residuen von bestimmten Ausdrücken, die hier für Schalen in Form eines Ellipsoids, eines zweischaligen Hyperboloids und eines elliptischen Paraboloids angegeben werden.

A. Kromm (Berlin).

Silverj, Domenico Gentiloni: La integrazione della equazione $\Delta^4 \chi = 0$ in un problema elastico in tre dimensioni. Bull. École Polytechn. Jassy 3, 254 — 276 (1948).

Berechnung der Spannungsverteilung in einem Maschinenteil eines Ofens in Form einer durchbohrten Kreisplatte mit umbogendem Rand, die als Deckel bei erhöhter Temperatur auf einem zylindrischen Sitz aufgezogen und beim Erkalten fest mit dem Sitz verbunden wird. Für den Ansatz der elasto-statischen Differentialgleichungen werden Zylinderkoordinaten verwendet, und die Spannungen nach A. E. H. Love [Theory of elasticity, Cambridge 1927, p. 274] durch eine Spannungsfunktion dargestellt, die der biharmonischen Differentialgleichung genügt. Die Berücksichtigung der Randbedingungen an der Berührungsstelle zwischen Deckel und Sitz erfordert besondere Festsetzungen. Die Integration wird angenähert durch Einführung von Legendreschen Polynomen geleistet, und die Verteilung der Spannungen und der Verschiebungen an den Randpunkten werden für drei Näherungen durch Schaubilder dargestellt. Th. Pöschl (Karlsruhe).

Richter, H.: Das isotrope Elastizitätsgesetz. Z. angew. Math. Mech. 28, 205 — 217 (1948).

Unter Anwendung der Berechnungsweise der Matrizenrechnung wird aus der Forderung der Isotropie und der Existenz eines thermodynamischen Potentials die allgemeine — d. h. für endliche Verzerrungen gültige — Form des Elastizitätsgesetzes im R_3 aufgestellt. Wie üblich wird das Material als isotrop bezeichnet, wenn die funktionale Beziehung zwischen der Spannungsmatrix (\mathfrak{P}) und der Deformationsmatrix (\mathfrak{Q}) invariant gegen euklidische Drehungen (\mathfrak{R}) ist, so daß \mathfrak{P} nur eine Funktion der Streckung (\mathfrak{S}) und der Temperatur (Θ) wird. Es zeigt sich, daß es zweckmäßig ist, an Stelle von \mathfrak{S} die „logarithmische Streckung“ ($\ln \mathfrak{S}$) einzuführen. Dies ermöglicht es, in einfacher Weise die Trennung einer Deformation in Gestalt- und Volumenänderung durchzuführen, was sich mittels \mathfrak{S} selbst als viel umständlicher erweist. Die elastische Energie ist nur dann in Volumen- und Gestaltsenergie aufspaltbar, wenn die mittlere Spannung nur von der Volumenvergrößerung abhängt. Ferner ergibt sich, daß das Hookesche Gesetz für endliche Verzerrungen nur für den Wert $m = 3$ der Poissonschen Zahl zulässig ist.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Davis, E. A.: A generalized deformation law. J. appl. Mech., New York 15, 237—240 (1948).

Seien τ_1, τ_2, τ_3 die Hauptschubspannungen, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Hauptschiebungen und 2 Materialfunktionen

$$\frac{\gamma_3 - \gamma_1}{\gamma_2} = f\left(\frac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_2}\right), \quad \frac{2}{3} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} = F\left(\frac{2}{3} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}\right)$$

gegeben; entsprechend bei zeitabhängiger Verformung

$$\dot{\gamma}_3 - \dot{\gamma}_1 = f^*\left(\frac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_2}\right), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} \right) = F^*\left(\frac{2}{3} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}\right).$$

Für Versuche im Bereich infinitesimaler oder endlicher plastischer Formänderungen, bei denen die Verhältnisse der Hauptschubspannungen in jedem Punkt konstant bleiben, ergibt sich für die plastischen Hauptdehnungen

$$\varepsilon_1 = \frac{F}{2\sqrt{2\sqrt{3} + f^2}} (2 - f) + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}, \quad \varepsilon_2 = \frac{F}{2\sqrt{2\sqrt{3} + f^2}} \cdot 2f + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{F}{2\sqrt{2\sqrt{3} + f^2}} (-2 - f) + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3},$$

was bei kleinen elastischen Formänderungen in das Hookesche Gesetz übergeht bei sinngemäßer Verfügung über f und F . Bei zeitabhängiger Verformung sind links die ε_i durch die $\dot{\varepsilon}_i$ zu ersetzen und rechts f und F durch f^* und F^* . Falls die Funktionen f und F wirklich unabhängig sind, was durch Versuche erst noch zu

klären ist und schwierig zu klären sein dürfte, ergäbe sich die Möglichkeit, aus dem Zugverzug Aussagen für kombinierte Beanspruchungen ableiten zu können. Zum Schluß wird erörtert, wie sich die bisherigen Plastizitätstheorien in die vorliegende Theorie einordnen.

Moufang (Frankfurt a. M.).

Swainger, K. H.: Saint-Venant's and Filon's finite strains: definition non-linear in displacement gradients. *Nature*, London **164**, 23—24 (1949).

Die Definition der Verzerrungen durch Ausdrücke in den Verschiebungsableitungen bis zur 2. Ordnung durch Betrachtung der quadratischen Differentialform $ds'^2 - ds^2$, wobei entweder die Koordinaten des Ausgangs- oder Endpunktes als laufende Koordinaten gewählt werden können, ist nach Meinung des Verf. nicht geeignet, um in physikalisch brauchbarer Weise mit den Spannungen verknüpft zu werden, auch wenn viele Autoren diese Definition des Verzerrungstensors ihren Untersuchungen zugrunde gelegt haben. Am Beispiel einer reinen Normalbelastung parallel zu den Achsen eines Cartesischen Koordinatensystems wird gezeigt, daß lineare Verschiebungsglieder ausreichen, um endliche Formänderungen zu beschreiben: Die Verschiebung D mit den Komponenten D_i bringe einen Punkt mit dem Ortsvektor R^0 in seine Endlage mit dem Ortsvektor R , also $R - D = R^0$. Dann ist $(R^0)^2/(R)^2 = \sum (r_i)^2 (1 - \partial D_i/\partial R_i)^2$, wo r_i = Richtungskosinus des Vektors R bezüglich der Koordinatenachse R_i ist. Für die wahren Längenänderungen e_{ii} in Richtung einer Koordinatenachse, definiert durch $R^0 = R (1 - e_{ii})$ ergibt sich daraus speziell $e_{ii} = \partial D_i/\partial R_i$ (R_i = Koordinaten des Punktes der Endlage). Diese Formeln hatte bereits Cauchy abgeleitet. Im Gegensatz hierzu ist die sonst übliche Definition der Normalverzerrungen $\partial D_i/\partial R_i - \frac{1}{2} (\partial D_i/\partial R_i)^2$.

Moufang (Frankfurt a. M.).

Weber, C.: Berichtigung zur kleinen Mitteilung: C. Weber, Zur nichtlinearen Elastizitätstheorie. *Z. angew. Math. Mech.* **28**, 189—190 (1948). *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 256 (1949).

In den Gleichungen (11), (14), (17) bis (20) der obigen Arbeit (s. dies. Zbl. **30**, 279) werden einige Schreibfehler berichtigt, die an dem Inhalt der Arbeit nichts Wesentliches ändern.

Moufang (Frankfurt a. M.).

Eddy, R. P. and F. S. Shaw: Numerical solution of elastoplastic torsion of a shaft of rotational symmetry. *J. appl. Mech.*, New York **16**, 139—148 (1949).

Ein drehsymmetrischer Stab von veränderlichem Radius aus isotropem Material werde durch Torsionsbeanspruchung teilweise plastiziert. Der Eintritt des Fließens unterliege der Schubspannungshypothese und der Fließvorgang sei idealplastisch. Gesucht ist die Grenze zwischen dem plastischen und elastischen Bereich des Stabes. Zur mathematischen Formulierung des Problems werden die Schubspannungen $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$ mit Hilfe einer Spannungsfunktion $\varphi(r, z)$ dargestellt, die folgenden Bedingungen genügt:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (\varphi_r^2 + \varphi_z^2)^{\frac{1}{2}} \begin{cases} < kr^2 & \text{im elastischen Bereich,} \\ = kr^2 & \text{im plastischen Bereich.} \end{cases}$$

Die Randbedingungen sind $\varphi = 0$ auf der Stabachse, $\varphi = \varphi = \text{const.}$ am Mantel. Auf der Grenzfläche zwischen elastischem und plastischem Bereich sind φ , $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ stetig. Eine numerische Lösung durch Iteration nach den Prinzipien der „Relaxationsmethode“ gelingt durch schrittweises Vordringen von der Oberfläche, wo die plastische Verformung beginnt, ins Innere des Stabes. Wesentlich dabei ist die Beziehung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = kr^2$, die für jede Fläche $\varphi = \text{const.}$ erfüllt ist. Zur Durchführung der Rechnung ist der Übergang zur dimensionslosen Variablen empfehlenswert; sie ist ausgeführt am Beispiel eines zylindrischen Stabes, der sich an einer Stelle zu einer zylindrischen Scheibe verdickt; an der inneren Kröpfungs-

ecke, wo durch Kerbwirkung Spannungsspitzen auftreten, ist der Sitz eines plastischen Bereiches, dessen Begrenzung bestimmt wird. *Moufang.*

Dorn, J. E. and A. J. Latter: Stress-strain relations for finite elastoplastic deformations. J. appl. Mech., New York **15**, 234—236 (1948).

Die Definition der Verzerrungsgrößen bei endlichen Formänderungen erfolgt unter Zugrundelegung der Transformationsgleichungen in der Lagrangeschen Form $x = x(x_0, y_0, z_0, t)$ usw. durch $\bar{\epsilon} = \ln(dr/dr_0)$, wo dr_0 der Abstand zweier unendlich benachbarter Punkte des unverformten Körpers, dr der Abstand ihrer Bildpunkte ist. Als Verzerrungsgrößen werden daraus für die Normaldehnung die Ausdrücke abgeleitet

$$\bar{\epsilon}_{x_0} = \ln \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)^2} \quad \text{usw.}$$

und für die Schiebungen

$$\bar{\gamma}_{x_0 y_0} = \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} + \frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial z}{\partial x_0} \frac{\partial z}{\partial y_0} \right) \exp(-(\bar{\epsilon}_{x_0} + \bar{\epsilon}_{y_0})) \quad \text{usw.}$$

Die Hypothese von Lode [Z. VDI. **303** (1938)], daß bei verfestigungsfähigen Stoffen die Zunahme der plastischen Verzerrungen mit den Spannungen verknüpft ist, führt dann bei elastisch-plastischen Formänderungen auf eine additive Zerlegung von $d\epsilon_x$ resp. $d\gamma_{xy}$ in einen plastischen und einen elastischen Anteil. Unter der Annahme der Isotropie lassen sich beide Anteile durch die Spannungskomponenten ausdrücken. In Lodes Ansatz für das plastische Fließen wird dann unter Annahme der Inkompressibilität $d\epsilon_x$ proportional zu $(\sigma_x - J_1)$ und $d\gamma_{xy}$ proportional zu $2\tau_{xy}$, der Proportionalitätsfaktor ist $\frac{3}{2} d\bar{J}_{2\text{plast.}}/J_2$; hierbei ist J_1, J_2 die erste und zweite Invariante des Spannungstensors, $d\bar{J}_{2\text{plast.}}$ die zweite Invariante des differenzierten plastischen Verzerrungstensors. Die plastische Verzerrungsenergie läßt sich durch J_2 und $dJ_{2\text{plast.}}$ darstellen.

Moufang (Frankfurt a. M.).

Phillips, Aris: Variational principles in the theory of finite plastic deformations. Quart. appl. Math. **7**, 110—114 (1949).

Auf Grund der von R. Kappus (s. dies. Zbl. **22**, 86 u. 415) entwickelten Theorie der endlichen Formänderungen wird das plastische Verhalten durch die Gleichungen beschrieben

$$\tau_{pq} = \frac{f(D^*)}{D^*} g_{pq}^* + K \frac{\delta_{pq}}{3} \sum_{i=1}^3 g_{ii}, \quad T^* = f(D^*) \quad \text{bzw.} \quad D^* = \Phi(T^*),$$

wo (g_{pq}) der Verzerrungstensor, (g_{pq}^*) der Verzerrungsdeviator, δ_{pq} das Kronecker-Symbol, (τ_{pq}) der Spannungstensor, (τ_{pq}^*) der Spannungsdeviator ist, D^* resp. T^* die 2. Invariante des Verzerrungs- resp. Spannungsdeviators, K eine elastische Konstante und f die experimentell gegebene Verfestigungsfunktion ist. Die Formänderungsgleichungen gestatten eine Auflösung nach g_{pq} . Seien F_i die Komponenten der Massenkraft, F'_i die Komponenten der Oberflächenkraft, u_i die Komponenten der Verrückung und

$$A_0 = \int_0^{D^*} f(D^*) dD^* + \frac{3}{2} K \left(\sum \frac{g_{ii}}{3} \right)^2.$$

Dann wird für das System der wirklich auftretenden Verschiebungen und Spannungen der Ausdruck

$$\int_V A_0 dV - 2 \int_V F_i u_i dV - 2 \int_S F'_i u_i dS$$

zu einem Minimum für den unter gegebenen äußeren Kräften sich im Gleichgewicht befindlichen Körper, verglichen mit einem benachbarten Zustand $u_i + \delta u_i$, $g_{pq} + \delta g_{pq}$ bei festgehaltenen Spannungskomponenten und äußeren Kräften. Setzt man

$$B_0 = \int_0^{T^*} \Phi(T^*) dT^* + \frac{3}{2} \left(\sum \frac{\tau_{ii}}{3} \right)^2,$$

so ist der Ausdruck $\int_V B_0 dV - 2 \int_{S_0} F'_1 u_i dS$, in dem das 2. Integral über den Teil der Oberfläche zu erstrecken ist, auf dem durch die Randbedingungen nicht die äußeren Kräfte vorgeschrieben sind, für den wirklichen Zustand ein Minimum, verglichen mit einem benachbarten Spannungszustand bei festgehaltenen Verzerrungen, Verschiebungen und Volumenkräften. Beide Variationsprinzipien enthalten die Variationsprinzipien der infinitesimalen plastischen Deformationen als Spezialfall [siehe dazu L. M. Kachanow, Priklad. Mat. Mech., Moskva 6, 187—196 (1942); A. Philippidis, Spannungen und Verformungen im elastischen Bereich, München 1944, unveröffentlichter Bericht]. *Moufang* (Frankfurt a. M.).

Riz, P. M.: Große Deformationen und Plastizität. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 211—212 (1948) [Russisch].

Zur Behandlung von Problemen, in denen weder die Formänderungen infinitesimal sind noch die Spannungen mit den Deformationen linear zusammenhängen, wird ein Verformungsgesetz zugrunde gelegt, in dem die Spannungskomponenten eine quadratische Funktion der Verzerrungskomponenten sind; die letzteren sind in einem Cartesischen Koordinatensystem in der Trefftzschen Form gegeben, bezogen auf die Koordinaten des deformierten Punktes als unabhängige Variable. Das Verformungsgesetz enthält außer den Laméschen Konstanten λ, μ 3 Parameter, die dem Stoffverhalten angepaßt werden können. Das plastische Verhalten soll gekennzeichnet sein durch die Henckysche Hypothese der konstanten Gestaltungsänderungsenergie unter Berücksichtigung der Glieder 3. Ordnung in den Verzerrungen. Im Falle eines kompressiblen Körpers mit konstantem Kompressibilitätsmodul sind die oben genannten 3 Parameter eindeutig aus 3 linearen Beziehungen bestimmt. An Stelle des elastischen Moduls μ ist im plastischen Gebiet eine Funktion der Koordinaten zu setzen. Im Falle eines inkompressiblen Körpers besteht zwischen den 3 Invarianten des Verzerrungstensors eine lineare Abhängigkeit. Einer der 3 Parameter ist jetzt auch noch als eine Funktion der Koordinaten anzusehen. In den Gleichgewichtsbedingungen sind die Spannungen nach den Koordinaten der Endlage zu differenzieren. Zum Schluß wird skizziert, wie das Verfahren sich gestaltet, wenn man alle Unbekannten als Potenzreihen ansetzt, von denen in den Verschiebungen und den Gleichgewichtsbedingungen die quadratischen Glieder, in dem Ausdruck für die potentielle Energie und in der Plastizitätsbedingung Glieder 3. Ordnung beibehalten werden. *Moufang* (Frankfurt a. M.).

Prager, William: The stress-strain laws of the mechanical theory of plasticity—a survey of recent progress. J. appl. Mech., New York 15, 226—233 (1948).

Ein Literaturverzeichnis, das 50 klassische und moderne Arbeiten zur mathematischen Plastizitätstheorie umfaßt, ist die Unterlage des Berichtes, der die Grundbegriffe der Plastizitätstheorie für ein isotropes, inkompressibles und reibungsfreies Material auseinandersetzt und die Verformungsgesetze in solche vom „Fließtypus“ und vom „Deformationstypus“ aufspaltet; letztere enthalten nur die Lokalwerte der Spannungen und Verzerrungen, erstere dagegen auch die zeitlichen Ableitungen dieser Größen. In jüngster Zeit ist von Prager ein allgemeines Gesetz vom zweiten Typus, von Handelman, Lin und Prager ein allgemeines Gesetz vom ersten Typus aufgestellt worden, in das die 2. und 3. Invariante des Spannungstensors eingeht. Die 3. Invariante ist in den bisherigen Ansätzen weder in der Fließbedingung noch im Verformungsgesetz berücksichtigt worden. Besonders erörtert wird die Notwendigkeit, bei allgemeinen Belastungszuständen in verschiedenen Bereichen des Körpers verschiedene Verformungsgesetze anzuwenden, z. B. elastisches vom plastischen Verhalten zu trennen und in letzterem Belastungs- und Entlastungszustände durch ein mathematisches Kriterium zu unterscheiden. Besondere Beachtung erfordern dann die an der Trennfläche zu erfüllenden Stetigkeits- bzw. Sprungbedingungen. Sie müssen so formuliert sein, daß ein physikalisch sinnvoll formuliertes Randwertproblem eine mathematisch eindeutige Lösung hat. — Verformungsgesetze können in verschiedenem mathematischem Gewand physikalisch dasselbe aussagen; physikalisch verschiedene Verformungsgesetze können in speziellen Belastungsfällen dasselbe Resultat ergeben. Der Ausbau von numerischen Verfahren zur Integration der Grundgleichungen ist unerläßlich. Theoretisch ist auch die Übertragung der Minimalprinzipie der Elastizitätstheorie auf den plastischen Bereich wichtig. *Moufang* (Frankfurt a. M.).

Trifan, D.: A new theory of plastic flow. Quart. appl. Math. 7, 201—211 (1949).

Das plastische Fließen in einem isotropen, inkompressiblen, verfestigungsfähigen Material ohne scharfe Fließgrenze wird untersucht, wenn auf eine Belastung eine teilweise oder vollständige Entlastung folgt. Für den Fall der Belastung sind in dem Verformungsgesetz die Ableitungen des Spannungsdeviators \mathfrak{P}' gegeben als Funktionen des Verzerrungstensors \mathfrak{E} , seiner Ableitungen und der Invarianten von \mathfrak{E} (sog. Spannungstheorem des plastischen Verhaltens): $\mathfrak{P}' = 2G_0\dot{\mathfrak{E}} - p(E)\dot{E}\mathfrak{E}$, wobei p eine willkürliche Funktion der Verzerrungsenergie E ist; p kann aus einem Zugversuch bestimmt werden. Wenn für $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ eine Reihenentwicklung gegeben ist, ist die Entwicklung für $p(E)$ bekannt. Für den Fall der Entlastung wird das differenzierte Hookesche Gesetz $\mathfrak{P}' = 2G_0\dot{\mathfrak{E}}$ angenommen. Bei kombinierter Beanspruchung können in einem Körper Belastungs- und Entlastungszustände gleichzeitig auftreten. Die Verformungsgesetze lassen sich für beide Fälle einheitlich formulieren, wobei $\dot{E} > 0$ Belastung, $\dot{E} < 0$ Entlastung charakterisiert. Zu einem gegebenen Verzerrungszustand des Körpers und gegebenen Verschiebungsgeschwindigkeiten an der Oberfläche, wobei das Oberflächenintegral über die Normalkomponente der Geschwindigkeit null ist, sind die Verzerrungsgeschwindigkeiten eindeutig im Innern des Körpers bestimmt. Für einen Körper im Belastungszustand nimmt das Integral $\int \mathfrak{E} \mathfrak{P}' dV$ für das System der wirklich auftretenden Dehnungsgeschwindigkeiten, sofern diese den Gleichgewichtsbedingungen, der Inkompressibilität und der Bedingung $\mathfrak{E} \dot{\mathfrak{E}} > 0$ genügen, einen minimalen Wert an. Dieses Minimumsprinzip gilt mit einigen Modifizierungen auch dann, wenn Teile des Körpers sich im Entlastungszustand befinden. — Der obigen Theorie des plastischen Fließens steht die gewöhnliche Theorie der plastischen Verzerrung gegenüber, wo $\mathfrak{P}' = 2G'(E)\mathfrak{E}$ ist. Auch hier denke man sich $G'(E)$ in eine Potenzreihe entwickelt. Die Integration der Grundgleichungen beider Theorien durch Reihenentwicklung aller Unbekannten nach t ist durchführbar. Hierbei zeigt sich, daß beide Theorien bei Berücksichtigung der Glieder 1. und 3. Grades übereinstimmen. Übereinstimmung in weiteren Näherungen läßt sich erzielen. In Sonderfällen kann die Übereinstimmung auch streng erfüllt sein. *Moufang* (Frankfurt a. M.).

Philippides, A. H.: The general proof of the principle of maximum plastic resistance. J. appl. Mech., New York 15, 241—242 (1948).

Das von Sadowsky [J. appl. Mech., Trans. ASME, 65 A—65 (1943)] ausgesprochene Prinzip, daß unter allen statisch möglichen Spannungsverteilungen im Bereich des plastischen Fließens die wirkliche Spannungsverteilung das Integral der äußeren Kräfte, die zur Aufrechterhaltung des Fließzustandes nötig sind, zu einem Maximum macht, wird mathematisch im Rahmen infinitesimaler Formänderungen bewiesen auf Grund der Plastizitätsgesetze: a) Artgleichheit von Spannungs- und Verzerrungsdeviator $\mathfrak{P}' = \lambda \mathfrak{E}$, b) Inkompressibilität, c) Fließbedingung der konstanten Gestaltänderungsenergie $T = \text{const.}$ Dann verschwindet die 1. Variation des Integrals $\int \frac{T^2}{2\lambda} dV$, wenn die Spannungen durch benachbarte Werte, die mit den Gleichgewichtsbedingungen verträglich sind, ersetzt werden bei festgehaltenen Verzerrungen. Sadowskys Formulierung dieses Prinzips für den Fall der Zugtorsion eines Stabes und Handelmans Formulierung für den Fall der Biegetorsion [Quart. appl. Math. 1, 351 (1944)] sind Spezialfälle des hier formulierten allgemeinen Prinzips. *Moufang* (Frankfurt a. M.).

Prager, W.: Discontinuous solutions in the theory of plasticity. Studies Essays pres. to R. Courant, 289—300 (1948).

Das ebene Problem des plastischen Gleichgewichts unter Zugrundelegung der Schubspannungshypothese als Fließbedingung ist bei gegebenen Randspannungen ein statisch bestimmtes Problem. Seine Grundgleichungen lassen Sprünge in den

1. Ableitungen der Spannungskomponenten zu beim Durchgang durch die Hauptschubspannungslinien (Charakteristiken des Problems). In Analogie zur Theorie der Stoßwellen in kompressiblen Flüssigkeiten beansprucht das Studium höherer Unstetigkeiten in der Plastizitätstheorie besonderes Interesse. Im Gegensatz zur Elastizitätstheorie sind im plastischen Bereich die Bestimmung der Spannungen und die Bestimmung der Verschiebungsgeschwindigkeiten verschiedene Randwertprobleme. Zur Bestimmung des plastischen Gleichgewichts sind die üblichen Parameter $\omega = (\sigma_x + \sigma_y)/4k$ (k = Fliebschubspannung) und Θ = Richtungswinkel der ersten Schar Hauptschubspannungslinien geeignet. Die Sprungbedingungen längs einer ebenen Kurve C fordern Stetigkeit der Normalkomponente und der Tangentialkomponente der übertragenen Spannung, lassen aber Sprünge von σ_t längs der Kurve zu; dies führt auf zwei einfache Sprungbedingungen in ω und Θ , die eine geometrische Deutung zulassen. Eine Unstetigkeit in der Krümmung der Hauptschubspannungslinien der ersten und zweiten Schar beim Durchgang durch eine Unstetigkeitskurve lassen sich darstellen mit Hilfe der Sprünge von Θ und deren Ableitungen längs der Kurve. Zum Schlusse wird am Beispiel des längs einer Flanke mit gleichförmigem Normaldruck belasteten Keiles die Abhängigkeit der Spannungsverteilung vom Öffnungswinkel untersucht. Nur bei kleinem Öffnungswinkel tritt eine Unstetigkeitsfläche auf; das Geschwindigkeitsfeld ist dagegen durchweg stetig.

Moufang (Frankfurt a. M.).

Winzer, Alice and G. F. Carrier: The interaction of discontinuity surfaces in plastic fields of stress. *J. appl. Mech.*, New York 15, 261—264 (1948).

In der vorstehend referierten Arbeit von Prager wird ergänzend untersucht, welches die Minimalzahl der Unstetigkeitsflächen ist, die in einem Punkt zusammen treffen können, wenn jede ein Gebiet konstanter Spannungen abgrenzt; die Mindestzahl ist 4. Dies wird am Beispiel eines Trapezes, das auf den Parallelseiten durch gleichförmigen Normaldruck belastet ist, näher untersucht. Der an der Stirnfläche normal belastete abgestumpfte, unendlich lange Keil bietet ein Beispiel für die Existenz zweier verschiedener Lösungen des plastischen Gleichgewichtes. Die Frage der Eindeutigkeit bedarf allgemein noch der Untersuchung im Zusammenhang mit der Frage, wie die Spannungsverteilung eines geometrisch gegebenen Randwertproblems im idealisierten de-St.-Venant-Miseschen Material modifiziert werden muß beim Übergang zum physikalischen Material. Weiter untersuchen Verff. das Zusammentreffen von Gebieten konstanter Spannung mit sogenannten fächerförmigen Gebieten (fan), wo $\omega \pm \Theta = \text{const}$ (Bezeichnung siehe obiges Referat) und ihre gegenseitige Abgrenzung durch Unstetigkeitsflächen. Ist ein Punkt einer kräftefreien Begrenzung Ort von Unstetigkeiten, so ergeben sich Bedingungen für die Winkel der einfallenden und reflektierten Unstetigkeitsfront; für den Fall, daß ein Teil der Begrenzung eine gleichförmige Belastung trägt, lassen sich analoge Bedingungen aufstellen.

Moufang.

Bohnenblust, H. F. and Pol Duwez: Some properties of a mechanical model of plasticity. *J. appl. Mech.*, New York 15, 222—225 (1948).

Die Spannung und die Formänderungsenergie in einem Zugstab, der bis zu einem bestimmten Betrag gedehnt, darauf entlastet und Belastungsumkehr unterworfen wird, wird theoretisch so bestimmt, als ob der Stab aus einer Menge von Elementarteilen bestehe, deren jeder eine gewisse Fließgrenze ϵ_1 für Zug und ϵ_2 für Druck hat und im plastischen Bereich verfestigungslos fließt. Dann ist für jeden Teil die Spannung und die Formänderungsenergie bei gegebenem Verformungsgrad leicht angebar. Ist $p(\epsilon, \delta)$ die Verteilungsfunktion des Problems, so daß $p(\epsilon, \delta) d\epsilon d\delta$ den Anteil der Elemente angibt, deren kritische Dehnungswerte ϵ, δ im Intervall $\epsilon + d\epsilon$ resp. $\delta + d\delta$ liegen, so ergibt sich bei zunächst unbekanntem $p(\epsilon, \delta)$ die Spannung σ und die Formänderungsenergie e des Gesamtstabes durch eine Summe von Integralen. Die Diskussion dieser Formeln ergibt, daß σ additiv

in zwei Bestandteile zerfällt, deren erster nur von der Dehnung während des Belastungsprozesses, d. h. von dem Verlauf der Verfestigungskurve und deren zweiter nur von der Dehnungsabnahme im Entlastungsprozeß abhängt (Entfestigungskurve). Alle Entfestigungskurven gehen durch Parallelverschiebung auseinander hervor. Die Diskussion der Formel für die Energie e läßt eine geometrische Deutung zu als Differenz von Flächen. Ohne Kenntnis von $p(\varepsilon, \delta)$ lassen sich für e zu gegebenem Verformungsgrad Schranken angeben, womit die Möglichkeit gegeben ist, die wenigen bisherigen diesbezüglichen Meßwerte größenordnungsmäßig mit der Theorie zu vergleichen. *Moufang* (Frankfurt a. M.).

Gleyzal, A.: Plastic deformation of a circular diaphragm under pressure. *J. appl. Mech.*, New York **15**, 288—296 (1948).

Eine dünne kreisförmige Platte mit verschwindender Biegesteifigkeit aus inkompressiblem verfestigungsfähigem Material sei am Rand $r = a$ eingespannt und durch einseitig angreifenden kontinuierlichen, konstanten Normaldruck überelastisch beansprucht. Legt man dann das R. Schmidtsche Verfestigungsgesetz und den Ansatz von de St. Venant-Mises zugrunde, so lassen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen des rotationssymmetrischen Problems, dem Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen u, w in radialer und vertikaler Richtung 10 Beziehungen aufstellen, aus denen sich durch Elimination 2 endliche Gleichungen und 2 gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung ergeben. Nur in der Darstellung der Tangentialdehnung ist dabei ein in den Verschiebungsableitungen quadratisches Glied beibehalten. Die Auflösung der Gleichungen erfolgt graphisch-numerisch. Über die beiden freien Integrationskonstanten wird so verfügt, daß $u(a) = 0$ und $u(-a) = 0$, im Gegensatz zu den üblichen Randbedingungen $u(a) = 0$ und $du(a)/dr = 0$. — Die theoretischen Werte stimmen mit Versuchswerten befriedigend überein, jedoch ist nicht untersucht, ob der vorliegende Spannungszustand auch den Voraussetzungen genügt, unter denen Verf. seine Verformungsgesetze aufgestellt hat. *Moufang* (Frankfurt a. M.).

White, M. P. and Le Van Griffis: The propagation of plasticity in uniaxial compression. *J. appl. Mech.*, New York **15**, 256—260 (1948).

Untersuchungen über einachsige Beanspruchung durch Stoßdruck eines elastisch-plastischen Materials ohne scharfe Fließgrenze zeigen, daß fünf Arten des Verhaltens eintreten können, je nach der Schlaggeschwindigkeit: 1. Bei niedrigen Geschwindigkeiten elastischer Stoß; die dynamischen Spannungen sind mit der Stoßgeschwindigkeit proportional. 2. Bei höheren Geschwindigkeiten normaler plastischer Stoß, der dem Verhalten bei Schlagzug entspricht. Die dynamischen Spannungen sind kleiner als die, die sich bei gleicher Stoßgeschwindigkeit im elastischen Bereich ergeben würden. 3. Bei weiterer Geschwindigkeitssteigerung Auftreten normaler Stoßwellen, ihre Fronten sind Träger großer Spannungs-Dehnungsgradienten ähnlich wie bei Stoßwellen in Gasen. 4. Bei noch größeren Geschwindigkeiten wird das Material zu schwach, die Stoßgeschwindigkeit aufzunehmen, und die Deformation wird fließend; das Material fließt stetig gegen den Schlaghammer und in einer dünnen Schicht an der Hammeroberfläche entlang. 5. Bei Stoß mit Ultraschallgeschwindigkeit verhält sich das Material wie eine Flüssigkeit, die auf ein Hindernis stößt. Die dynamischen Spannungen sind dann mit dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional. *Moufang* (Frankfurt a. M.).

Caianiello, E.: Sul moto impulsivo di un sistema olonomo in presenza di vincoli unilaterali simultanei. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VIII. S. **4**, 706—714 (1948).

Während der Stoß bei einem System von n Freiheitsgraden, wenn er als vollkommen elastisch angenommen wird, mit dem Energieprinzip behandelt werden kann, falls nur eine einseitige Bindung vorgeschrieben wird, genügt das Prinzip nicht mehr bei gleichzeitiger Wirkung mehrerer Bindungen. Indem Verf. für das

Potential der elastischen Kraft beim Eindringen in zwei verbotene Gebiete den Ansatz

$$U(u_1, u_2) = -k\delta(u_1) u_1^2 - h\delta(u_2) u_2^2$$

macht, wobei u_1 und u_2 die kleinen Eindruckstiefen sind, gelingt es ihm zu beweisen, daß unabhängig von den Konstanten die tangentielle Komponente nach dem Stoß dieselbe ist wie vorher, während die normale nur das Zeichen ändert. *Hamel.*

● **Wilson, W. Ker:** Practical solution of torsional vibration problems. I; II. New York: John Wiley and Sons 1948. XX, 731; XXI, 694 p., illustr.; each volume \$ 10.00.

Sauter, Fritz: Bemerkungen zur Schwingungstheorie dünner elastischer Platten. Z. Naturforsch. 3a, 548—552 (1948).

Ausgehend von den elastischen Grundgleichungen gibt Verf. eine vergleichende Betrachtung der verschiedenen Schwingungstypen dünner elastischer Platten (Scherungs-, Dehnungs- und Biegungsschwingungen) und der zugehörigen Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten. *H. Neuber* (Dresden).

Miles, John W.: The diffraction of a plane wave through a grating. Quart. appl. Math. 7, 45—64 (1949).

Die Beugung einer senkrecht einfallenden akustischen Welle durch ein unendlich ausgedehntes Gitter mit unendlich dünnen, in einer Ebene liegenden gleich breiten Streifen und unter sich gleichen Abständen wird streng behandelt. Die Wellenfunktion auf beiden Seiten des Gitters wird durch die Geschwindigkeitsverteilung in den Öffnungen ausgedrückt; für letztere ergibt sich eine Integralgleichung. Ein Impedanzparameter Z , dessen Realteil der Durchlässigkeitskoeffizient des Gitters ist, wird eingeführt: Real- und Imaginärteil seines reziproken Wertes lassen sich durch je ein Variationsproblem charakterisieren. Eine entsprechende Integralgleichung läßt sich für die Diskontinuität des Druckes auf beiden Seiten der Streifen herleiten; sie wird in ein Variationsproblem für Real- und Imaginärteil von $(1 - Z)^{-1}$ umgewandelt. Die erste Integralgleichung wird durch Ansatz einer Fourier-Reihe für ihre Lösung in ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen umgewandelt, dieses wird näherungsweise für große Wellenlängen gelöst. Beim halboffenen Gitter wird der Anschluß an die Kirchhoffsche Näherung erreicht, wenn die Wellenlänge etwa gleich der halben Spaltbreite ist. Die Ergebnisse lassen sich unmittelbar auf die Beugung elektromagnetischer Wellen am Gitter mit vollkommen leitenden Streifen übertragen. Schließlich wird der Fall von Gitterstreifen nicht verschwindender Dicke auf ähnliche Weise behandelt und eine Näherungslösung angegeben, welche die Glieder erster Ordnung im Verhältnis Dicke zu Wellenlänge enthält. — Die Bedenken des Verf. gegen seine Lösung des elektromagnetischen Beugungsproblems dürften unnötig sein; denn bei den sogenannten zweidimensionalen Beugungsproblemen erfüllt die Lösung des elektromagnetischen Falles, welche in der angegebenen Weise aus der des akustischen Falles hergeleitet wird, von selbst die vom Ref. aufgestellte Kantenbedingung [Ann. Physik, VI. S. 6, 2—9 (1949)]. *J. Meixner* (Aachen).

Fox, E. N.: The diffraction of two-dimensional sound pulses incident on an infinite uniform slit in a perfectly reflecting screen. Philos. Trans. R. Soc. London, A 242, 1—32 (1949).

Verf. hat in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 30, 182) das Beugungsproblem für ebene Schallwellen behandelt und insbesondere eine Lösung des Problems für den Fall gegeben, daß die Beugung am Rande eines unendlichen, ebenen, vollständig reflektierenden Streifens stattfindet. Den Ausgangspunkt bildet die Lösung von Kirchhoff, welche er als eine inhomogene Integralgleichung behandelt. — In der vorliegenden Mitteilung wendet er die Resultate der früheren Arbeit auf etwa das komplementäre Problem an, daß die Streuung durch eine unendliche, geradlinige Öffnung von endlicher Breite in einer sonst unendlichen, ebenen, dünnen, reflektierenden Wand verursacht wird. Die Lösung findet er nach der Methode

sukzessiver Approximation in der Form einer unendlichen Reihe zunächst für den Fall, daß die Wellen in beliebiger Richtung auf die Wand einfallen, dann aber auch für den Fall normaler Inzidenz. Auf die Konvergenzfrage scheint Verf. nicht eingegangen zu sein. Indessen werden auf Grund numerischer Rechnungen Zahlen tafeln gegeben, woraus sich die Druckverhältnisse, einmal knapp hinter der Öffnung, ein andermal auch in großer Entfernung in erwartetem Maße zu ergeben scheinen.

S. C. Kar (Kalkutta).

Brillouin, Jacques: *Démonstration directe des formules de Fresnel pour la diffraction d'une onde plane par un demi-plan réfléchissant.* C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 513—514 (1949).

Eine sehr einfache Behandlung der Beugung einer ebenen akustischen Welle beliebiger Einfallrichtung an der reflektierenden Halbebene. Sie beruht auf der Einführung „halb-parabolischer“ Koordinaten $x, y, u = -y + \sqrt{y^2 + z^2}$.

J. Meixner (Aachen).

● **Blair, G. W. Scott:** *A survey of general and applied rheology.* 2. ed. London: Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd., 1949. XVI, 314 p., s. 40 net.

Optik:

Bremmer, H.: *The propagation of electromagnetic waves through a stratified medium and its W.K.B. approximation for oblique incidence.* Physica, The Hague **15**, 593—608 (1949).

Die eindimensionale Wellengleichung $y'' + k^2(x)y = 0$ läßt sich durch $y = \exp(\int \alpha(x) dx)$ auf die Riccatische Gleichung $\alpha' + \alpha^2 + k^2 = 0$ zurückführen und liefert als erste Näherung die Lösung $A \exp(i \int_0^x k(s) ds) + B \exp(-i \int_0^x k(s) ds)$,

während bei der zweiten Näherung beide partikulären Lösungen durch $\sqrt{k(x)}$ zu dividieren sind. Die so erhaltenen sukzessiven Approximationen stellen aber nicht die Terme einer Reihenentwicklung der strengen Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung dar. Eine solche Reihenentwicklung ist auf anderem Wege möglich, wie der Verf. früher bereits gezeigt hat. In der vorliegenden Arbeit dehnt er die von ihm seinerzeit benutzte Methode aus auf die eine ebene Welle darstellende Lösung der Maxwell'schen Gleichungen für ein dreidimensionales Medium, das in Richtung der z -Achse eine Schichtung aufweist. Die physikalische Kennzeichnung der Methode läßt sich — wie der Verf. im letzten Abschnitt der Arbeit näher zeigt — mit Hilfe der „Sattelpunkt-Methode“ der Auswertung exponentieller Integrale leicht zeigen.

Picht (Potsdam).

Hopkins, H. H.: *The disturbance near the focus of waves of radially non-uniform amplitude.* Proc. phys. Soc. London, Sect. B **62**, 22—32 (1949).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der formelmäßigen Bestimmung der Intensitätsverteilung in und in der Nachbarschaft der Brennebene einer Kugelwelle unter der Voraussetzung, daß die Intensitätsverteilung auf einer vom Brennpunkt genügend weit entfernten Wellenfläche (bzw. in der Austrittspupille des Objektivs) von der Mitte zum Rande variiert. Es ergeben sich so Erweiterungen der Lommel'schen Formelausdrücke, die vom Verf. in verhältnismäßig engen Intervallen und für einen zwei- bis dreimal so großen Umfang des Argumentes wie bei Lommel zahlenmäßig ausgewertet wurden. (Die Tabellen sind nicht mitveröffentlicht: Referent hat übrigens 1948/49 für eine bisher nicht veröffentlichte Arbeit anderer, wenn auch ähnlicher Zielsetzung gleichfalls Verallgemeinerungen der Lommel'schen Formeln erhalten und zahlenmäßig auswerten lassen, die gelegentlich veröffentlicht werden sollen.) Verf. wendet die erhaltenen Formeln und Zahlentafeln an, um die Intensitätsverteilung in verschiedenen der Brennpunktebene benachbarten Par-

alle Ebenen für den Fall zu berechnen, daß die in der Austrittspupille (A.P.) des Objektivs vorhandene Intensität von der Mitte zum Rande auf den halben Wert absinkt. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind graphisch wiedergegeben. Entsprechende Berechnungsergebnisse sind für die beiden Fälle, daß die A.P.-Intensitätsverteilung von der Mitte zum Rande auf Null bzw. vom Rand zur Mitte auf Null absinkt, graphisch wiedergegeben, wobei jedesmal — d. h. für jede der zur Brennebene parallelen Ebenen — auch die Intensitätsverteilung bei in der A.P. konstanter Intensitätsverteilung zum Vergleich des Unterschiedes mit eingetragen wurde.

Picht (Potsdam).

Vasseur, Jean-Pierre: Diffraction des ondes électromagnétiques par un écran plan parfaitement conducteur. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 179—181 (1949).

Es wird darauf hingewiesen, daß — wie von Bouwkamp [Referat in Math. Rev. **8**, 180 (1947)] bemerkt wurde — Copson [Proc. R. Soc., London, A **186**, 100—118 (1946)] bei der Behandlung des gleichen Problems ein Kurvenintegral vergessen habe, das zwar in den behandelten Beispielen Null sei, aber in anderen Fällen wichtig sein könne. Verf. beabsichtigt, die exakte Lösung zu geben. Das erhaltene Ergebnis hängt von einer Größe ab, die als Dicke des die Öffnung begrenzenden Schirmes gedeutet werden kann.

Picht (Potsdam).

Vasseur, Jean-Pierre: Nouvelle solution du problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par un écran plan parfaitement conducteur. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 586—587 (1949).

In dieser Arbeit wird das gleiche Problem wie in der vorsteh. referierten Arbeit behandelt, und zwar mit dem Unterschied, daß das elektromagnetische Feld jetzt von elektrischen Strömen der Dichte i ($= i_x, i_y, 0$) herrührend gedacht wird, während in der vorstehenden Arbeit angenommen wurde, daß das elektromagnetische Feld von magnetischen Strömen der Dichte j innerhalb der Öffnung herrühre. Anschließend wird auf das Babinetsche Prinzip kurz eingegangen. Auch wird auf die Analogie der hier erhaltenen mit den in der vorstehenden Arbeit erhaltenen Formeln, insbesondere auf den entsprechenden Bau dieser beiden Formelgruppen hingewiesen.

Picht (Potsdam).

Smith, T.: The contributions of Thomas Young to geometrical optics, and their application to present-day questions. Proc. phys. Soc. London, Sect. B **62**, 619—629 (1949).

In diesem zum Gedächtnis von Thomas Young gehaltenen Vortrag behandelt Verf. nach einigen historischen Bemerkungen die von Th. Young angegebenen Gleichungen, die sich auf die astigmatischen Fehler optischer Systeme beziehen, die — wie bei dem Verf. üblich — in Matrizenform gegeben werden. Es wird gezeigt, daß in sphärisch-symmetrischen Systemen die Zahl der Freiheitsgrade, d. h. die Anzahl der als sphärisch vorausgesetzten Flächen die Zahl der Aberrationen übertreffen muß, die korrigiert werden können. Es wird auf die Bedeutung der nicht-sphärischen Flächen für die Optik der Zukunft hingewiesen.

Picht (Potsdam).

Linfoot, E. H.: On the optics of the Schmidt camera. Monthly Not. astron. Soc. London **109**, 279—297 (1949).

Es werden Aberrationen fünfter Ordnung für die gewöhnlich benutzte Schmidt-sche Kamera formelmäßig abgeleitet, und es wird — auch experimentell — gezeigt, daß die erstrebte Bildgüte, die in der Mitte des Bildfeldes erreicht ist, nicht über das ganze Bildfeld erhalten bleibt. Die erhaltenen Aberrationsfunktionen benutzt Verf. zur Neuentwicklung einer Korrektionsplatte, die die monochromatischen Aberrationen besser korrigiert. In einer Reihe von Abbildungen werden die einem axialen sowie bestimmten außeraxialen leuchtenden Objektpunkten zugehörigen Bildpunkt-Intensitätsverteilungen — u. zw. für die Farben F , G und h — graphisch durch Andeutung der Isophoten dargestellt, und zwar sowohl für Abbildungen, bei denen die bisher übliche, als auch für solche, bei denen die auf Grund der Unter-

suchungen des Verf. verbesserte Schmidtsche Korrekptionsplatte benutzt wurde. Diese Gegenüberstellung zeigt deutlich die erzielte Verbesserung der Abbildungsgüte. *Picht* (Potsdam).

● **Rusterholz, A.: Elektronenoptik.** Basel: Verlag Birkhäuser 1949.

Vauthier, René: Propriétés focalisatrices et pouvoir séparateur d'un champ magnétique limité par des plans parallèles. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 181—183 (1949).

Da bei einem solchen magnetischen Feld nicht gleichzeitig Objekt und Bild reell sein können, betrachtet Verf. ein konvergentes Strahlenbündel, das, beim Durchgang durch das magnetische Feld abgelenkt, hinter dem Feld ein reelles Bild ergibt, und berechnet zunächst die Bedingung dafür, daß die zu einem (virtuellen) Objektpunkt hinzielenden Elektronenstrahlen nach dem Durchgang durch das planparallel begrenzte magnetische Feld fokussiert werden. Anschließend behandelt er das Auflösungsvermögen, und zwar für die beiden Fälle, daß der „Hauptstrahl“ des Bündels das Feld symmetrisch durchsetzt bzw. daß der Hauptstrahl um 90° abgelenkt wird. Die Ergebnisse werden noch kurz diskutiert. *Picht* (Potsdam).

Liebmann, G.: An improved method of numerical ray tracing through electron lenses. Proc. phys. Soc. London, Sect. B **62**, 753—772 (1949).

Atomphysik.

Quantenmechanik:

Conwell, Esther: Non-product wave function for a negative ion. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **74**, 268—276 (1948).

Die Näherungsfunktion für das O^- wird aufgebaut aus Produkten von Hartrees Einelektronen-Funktionen für O^- , aber multipliziert mit einem Kopplungsglied $1 + c \sum r$, wobei r den Abstand des hinzutretenden Elektrons von allen Atom-elektronen bedeutet, und c als Variationsparameter aus dem Energieminimum zu bestimmen ist. Mit dieser Funktion wird dann die Elektronenaffinität berechnet. Sie ergibt sich etwa doppelt so groß wie bei Hartree, liegt aber immer noch beträchtlich unter den experimentellen Werten. *Romberg* (Blindern/pr. Oslo).

Ashauer, S.: On the classical equations of motion of radiating electrons. Proc. Cambridge philos. Soc. **45**, 463—475 (1949).

Ausgehend von den Lorentz-Diracschen Bewegungsgleichungen des Elektrons [P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc., London, A **167**, 148—169 (1938); dies. Zbl. **23**, 427] untersucht Verf. die Bewegung ohne äußere Kräfte und für eine äußere Kraft von der Form eines δ -artigen Impulses. Im ersten Fall berechnet sie die Verteilung der Feldenergie, wenn infolge der Selbstbeschleunigung die Geschwindigkeit des Elektrons der des Lichtes nahekommmt. Im zweiten Fall geht sie über die Diracschen Ergebnisse hinaus, indem sie die relativistischen Effekte nicht vernachlässigt und auch „nichtphysikalische Lösungen“, d. h. Lösungen ohne die Diracsche Randbedingung, betrachtet. *Höhler* (Berlin).

Schwinger, Julian: Quantum electrodynamics II. Vacuum polarization and self-energy. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **75**, 651—679 (1949).

Im ersten Abschnitt wird das von elektromagnetischen und Materiefeldern ohne Wechselwirkung erfüllte Vakuum definiert als der Zustand minimaler Energie, d. h. in kovarianter Definition: der Eigenwert einer beliebigen zeitartigen Komponente des Energie-Impuls-Vektors soll ein absolutes Minimum sein. Für das elektromagnetische Feld führt dies auf die Forderung $A_\mu^{(+)}(x)\Psi_0 = 0$ (1). Dabei ist Ψ_0 der Zustandsvektor, der den feldfreien Raum darstellen soll. A_μ ist das transversale Vektorpotential und $A_\mu^{(+)}$ der Anteil seiner Fourierentwicklung, der nur positive Frequenzen enthält. Die entsprechende Zerlegung ist in kovarianter Weise mit Hilfe eines komplexen Integrals möglich. Mit Hilfe dieser Definition lassen sich Erwartungswerte von quadratischen Feldgrößen ausrechnen, indem man sie auf Kommutatoren und Restterme mit verschwindendem Erwartungswert zurückführt. Es ergibt sich, daß der elektromagnetische Energie-Impuls-Tensor in allen Komponenten verschwindet. Desgleichen verschwinden nach entsprechender Definition der Strom und

Energie-Impuls-Tensor für das Materiefeld, der letztere jedoch wegen seiner nichtverschwindenden Spur erst nach Addition eines geeigneten Vielfachen der Einheitsmatrix. Im zweiten Abschnitt wird unter Beschränkung auf virtuelle Paarbildung die Induktion eines Stromes im Vakuum durch ein äußeres elektromagnetisches Feld behandelt. Der induzierte Strom hängt nur von dem äußeren Strom in der Nähe des betrachteten Welpunktes und nicht von den Potentialen ab. Eine Lichtwelle erzeugt also entfernt von ihrem Ursprung keine Vakuum-polarisation und wird daher in ihrer Ausbreitung nicht gestört. Der Strom enthält im übrigen ein divergentes Glied, das eine Renormalisierung der Ladung bedeutet, und einen physikalisch reellen Anteil, der mit dem in früheren Untersuchungen gefundenen übereinstimmt. Ein dritter Abschnitt behandelt die Änderung der Eigenschaften des Materiefeldes durch die Wechselwirkung mit den Vakuumschwankungen des elektromagnetischen Feldes. Da Prozesse dieser Art in erster Ordnung (Emission oder Absorption eines Lichtquants durch ein freies Elektron, Paarerzeugung durch ein Lichtquant) stets virtuell sind, wird die Bewegungsgleichung für den Zustandsvektor so angesetzt, daß nur die Wechselwirkungen 2. Ordnung darin auftreten. Die Selbstenergie eines Lichtquants wird null; die der Teilchen läßt sich wieder durch Renormalisierung der Masse erledigen. In einem Anhang werden die verschiedenen D - und Δ -Funktionen, von denen gewöhnlich nur gewisse Differential-, Integral- und Symmetrieeigenschaften gebraucht werden, explizit hergestellt.

Wessel (Dayton, Ohio).

Wentzel, Gregor: Über die Feldgleichungen in quantisierten Feldtheorien. Z. Naturforsch. 3a, 430—434 (1948).

Der Tomonagasche mehrzeitige Formalismus der Quantentheorie der Wellenfelder, in dem jedem Punkt des R_3 eine individuelle Zeit zugeordnet ist, so daß der Prozeß der Zeit-Differentiation durch funktionale Ableitungen ersetzt werden muß, wird an Hand von einfachen Beispielen auseinandergesetzt. Die Massen-Renormalisierung wird für den Fall eines skalaren Feldes erläutert. Tousehek.

Couture, K. J. le: Particles of half-odd integral spin. Proc. Cambridge philos. Soc. 44, 63—75 (1948).

Verf. untersucht, an Arbeiten Bhabhas anschließend, dirac-ähnliche Wellengleichungen von halbzahligem Spin $(\beta_\mu p_\mu + \kappa)\psi = 0$, deren Matrizen durch die de Brogliesche „méthode de fusion“ oder die Vertauschungsrelationen $[\beta_\lambda[\beta_\mu\beta_\nu]] - g_{\lambda\mu}\beta_\nu - g_{\lambda\nu}\beta_\mu$ definiert sind. — Die Quantisierung geschieht im Impulsraum mit Jordan-Wignerschen Plusklammern. Die Teilchen gehorchen dann der Fermi-Statistik. Die Ladungsdichte hat aber für „Spin“ $\geq \frac{3}{2}$ auch negative Eigenwerte, damit müssen gewisse der Plusklammern negative Werte bekommen. Für Teilchen ganzzahligen Spins hat Pauli gerade aus einer solchen Unverträglichkeit geschlossen, daß sie nicht Fermi-Statistik haben können. Führt man mit Bhabha und Verf. die Dirac-Paulische indefinite Metrik im Hilbertraum ein, so ist der Formalismus zunächst gerettet. (Es bleibt dann unklar, warum es trotzdem in der Natur für Teilchen ganzzahligen Spins keine Fermi-Statistik gibt.) Über die bereits von Pauli bemerkten Schwierigkeiten der physikalischen Interpretation scheint sich Verf. hinwegzusetzen. Für den Fall des „Spins“ $3/2$ wird von der möglichen Wechselwirkung mit einem vektoriellen Kemmerschen Mesonenfeld $L^{\text{int}} = -g(\psi^\dagger \beta^\mu \psi \Phi_\mu) - \frac{1}{2}f(\psi^\dagger [\beta^\mu \beta^\nu] \psi \chi_{\mu\nu}) + \text{conj.}$ nur der leichter zu rechnende Term betrachtet. Die 16-komponentige Darstellung $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, die im nicht-relativistischen Grenzfall zum Spin $\frac{1}{2}$ führt und von Bhabha deshalb dem Proton-Neutron zugeschrieben wird, liefert einen Wirkungsquerschnitt, der um den Faktor 17_9 größer ist als der aus der Diracschen Theorie. Dieser Faktor liegt noch innerhalb der Fehlergrenzen der derzeitigen Experimente.

Bauer (München).

Petiau, Gérard: Sur les équations d'ondes de la théorie du corpuscule de spin $\hbar/2\pi$ et leurs généralisations. J. Physique Radium, VIII. S. 10, 215—224 (1949).

Verf. behandelt verschiedene Erweiterungen der de Broglieschen méthode de fusion. 1. Van Isacker [C. r. Acad. Sci., Paris 224, 1758—1760 (1947)] einerseits, Hönl andererseits haben das skalare Massenglied durch eine Funktion aus dem Zentrum der verwandten Algebra (durch eine Matrizenfunktion, die mit allen vorkommenden Basismatrizen vertauschbar ist) ersetzt. Dadurch erhält u. U. jede der in einer Verschmelzungsstufe steckenden irreduziblen Darstellungen eine

andere Ruhmasse. — Im Falle des Spins 1 gehen drei Konstante in die Matrizenfunktion ein. Verf. nimmt ad hoc eine weitere Aufspaltung mit fünf Konstanten vor. Dadurch wird die Gleichung des vektoriellen Mesons $p_{[\mu}\Phi_{\nu]} + ic\chi' \Phi_{\mu\nu} = 0$, $p_{\mu}\Phi_{\mu\nu} + ic\chi''\Phi_{\nu} = 0$, wo $\chi' \neq \chi''$ sein kann (und ähnlich für das skalare Meson). $p_{[\mu}\Phi_{\nu]}$ bedeutet $p_{\mu}\Phi_{\nu} - p_{\nu}\Phi_{\mu} - 2$. Verf. führt die Fusion für zwei Dirac-Teilchen verschiedener Masse M_1 und M_2 durch. Es entstehen leicht abgeänderte Wellengleichungen mit den Massen $\mu_1 = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$ und $\mu_2 = M_1 M_2 / (M_1 - M_2)$. Die Isacker-Hönlische Methode wird auch darauf angewandt. Man erhält eine vollständige Verkopplung der zu den drei Darstellungen der Verschmelzungsstufe 1 gehörenden Wellenfunktionen in einem System, das auf anderem Weg Potier (s. folgendes Referat) gefunden hat und das einige bereits diskutierte Ansätze (Eriksson, Podolsky, Raisky u. a.) einschließt. — Schließlich wird noch die mögliche Møller-Rosenfeldsche Zusammenfassung in einem fünfdimensionalen Raum diskutiert. Bauer (München).

Potier, Robert: Sur la représentation d'un corpuscule de spin à masses multiples. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 63—64 (1948).

Verf. hat in einer dem Ref. nicht zugänglichen vorangehenden Arbeit [C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 638 (1946)] ein System von Wellengleichungen zum Spin 1 definiert, in denen die 16 Wellenkomponenten, die durch Fusion der Dirac-Komponenten entstehen, dadurch verkopelt sind, daß das Massenglied durch eine bestimmte Matrix ersetzt wird, die mit den übrigen Matrizen der Wellengleichung nicht mehr vollständig vertauschbar ist. Inzwischen hat Petiau (vorstehendes Referat) auf anderem Wege ein ähnliches System herstellen können. Dieses System (das die Komponenten eines skalaren und eines vektoriellen Mesons samt einer skalaren Funktion verkopelt) erfüllt die üblichen Forderungen, so Lorentz-Invarianz, Irreduzibilität, Eichinvarianz. Es läßt viererlei Massen zu, von denen auch je zwei identisch sein können. Verf. glaubt, die beiden Mesonenmassen damit beschreiben zu können; da aber π -Meson und μ -Meson in mehr als einer Hinsicht wesensverschieden zu sein scheinen, dürfte es nicht sinnvoll sein, sie als sonst gleichberechtigte Zwillinge mit einer Wellengleichung beschreiben zu wollen.

Bauer (München).

Potier, Robert: Sur une théorie de méson à masses multiples. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 314—316 (1948).

Es werden die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Massenwerten aus der vorstehend besprochenen Arbeit untersucht und gewisse Auswahlregeln aufgestellt. Eine Anwendung auf die neuesten experimentellen Befunde wird versucht, überwältigende Bestätigung gelingt nicht. Bauer (München).

Majumdar, R. C. and S. Gupta: The meson fields and the equation of motion of a spinning particle. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **75**, 1788—1793 (1949).

Für das Mesonenfeld ist die Dipolwechselwirkung mit Nukleonen charakteristisch. Es wird eine relativistisch invariante Theorie der Bewegung eines punktförmigen Dipols gegeben. Das mathematische Vorgehen führt auf Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typ, die nach dem Verfahren von Riesz gelöst werden. Damit ist eine Berechnung des Mesonenfeldes möglich nicht nur in einem Punkt außerhalb der Weltlinie des Nukleons, sondern auch in einem Punkte der Weltlinie selbst. Die Bewegungsgleichungen folgen in der aus der Elektrodynamik bekannten Weise. Die Gleichungen sind frei von Singularitäten. K. H. Höcker.

Schiff, L. I.: Spontaneous decay rate of heavy mesons. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 303—304 (1949).

Die Annahme einer direkten Kopplung zwischen π - und μ -Mesonen, die den π - μ -Zerfall erklärt, gibt auch die Absorption negativer μ -Mesonen durch Kerne richtig wieder. — Andererseits wurde vorgeschlagen, daß Nukleonen (N) direkt mit μ -Mesonen zu koppeln wären. In diesem Fall ergibt sich der π - μ -Zerfall ohne An-

nahme einer π - μ -Kopplung. Nimmt man zusätzlich zur Erklärung des β -Zerfalls der Kerne eine Nukleonen-Elektronen (N - e)-Kopplung an, so kommt man ohne weiteres auf einen π - e -Zerfall. — Nach der Erfahrung am Zyklotron in Berkeley (unveröffentlicht) ist das Verhältnis der mittleren Lebensdauern $\tau_{\pi\mu}/\tau_{\pi e} < 1$. Die Rechnung liefert dagegen je nach Annahme der Kopplungskonstanten einen Wert von 4 bis 20. Eine N - e -Kopplung (oder auch eine π - e -Kopplung) führt daher zu einer Diskrepanz zwischen dem beobachteten β -Zerfall der Kerne und dem der π -Mesonen. Der Kernzerfall ist relativ zum β -Zerfall der π -Mesonen zu häufig.

K. H. Höcker (Stuttgart).

Wentzel, Gregor: Polarization effects of vector-mesons. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 75, 1810—1814 (1949).

Unter der Annahme, daß das Feld der π -Mesonen Vektorcharakter hat, wird die Mesonenproduktion in Abhängigkeit von der Polarisierung der Mesonen berechnet. Für den Fall, daß nur transversale Mesonen eine Kopplung aufweisen, werden keine Mesonen mit einer Polarisierung in der Richtung des einfallenden Teilchens (longitudinale Mesonen) erzeugt und umgekehrt. Der Zerfall des π -Mesons in μ -Meson und Neutrino ist zu berechnen analog dem bekannten Verfahren für den Zerfall von μ -Meson in Elektron und Neutrino. Schließlich wird der Einfluß des elektromagnetischen Feldes diskutiert: Präzession des Spinvektors um die Richtung des magnetischen Feldes und Depolarisation in elektrischen Feldern. K. H. Höcker.

Wu, Ta-You and H. M. Foley: Symmetrical meson theory of nuclear forces. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 75, 1681—1686 (1949).

Die symmetrische Theorie in der Mesonenmischung nach Møller, Rosenfeld und Schwinger wird weiter untersucht unter Ausnutzung der neuen Erfahrungen betreffend die große Wechselwirkung der π -Mesonen und die fehlende Wechselwirkung der μ -Mesonen mit Nukleonen. Man versucht, mit pseudoskalaren π -Mesonen (benutzte Masse $315 m_e$) und vektoriellen Mesonen einer Masse von 1,5 bis $3 m_\pi$ einige bekannte Daten des Zwei-Nukleonen-Systems zu berechnen. Im Potential wird das erste nicht statische Glied der Wechselwirkung berücksichtigt. Es erwies sich als nicht möglich, die folgenden Daten gleichzeitig quantitativ richtig zu berechnen: Bindungsenergie des Deuterons, Wirkungsquerschnitt für Neutronen-Proton-Streuung bei thermischen und hohen Energien, das Verhältnis der Streuintensität $\sigma(170^\circ)/\sigma(90^\circ)$ für 10^8 eV-Neutronen, die Reichweite der Kernkräfte im Triplett- und Singulett-Zustand und das Quadrupelmoment. Es wird betont, daß an der Diskrepanz möglicherweise die vernachlässigten relativistischen und Strahlungseffekte schuld sind, so daß nicht die Mesonentheorie als Ganzes für unzureichend erklärt werden kann.

K. H. Höcker (Stuttgart).

Koppe, Heinz: Die Mesonenausbeute beim Beschuß von leichten Kernen mit α -Teilchen. *Z. Naturforsch.* 3a, 251—252 (1948).

Beim Stoß eines Korns auf einen anderen entsteht zunächst ein Zwischenkern hoher Anregungsenergie, zu der eine bestimmte Temperatur T gehört. Bei der Beschießung von Kohlenstoffkernen mit α -Teilchen von 380 MeV ergibt sich T von der Größenordnung 10 MeV. Bei so hohen Temperaturen darf man nicht mehr mit konstanten Teilchenzahlen rechnen, sondern muß die Möglichkeit der Paarerzeugung berücksichtigen. Die thermische Erzeugung von Teilchen setzt ein, sobald T von der Größe der Ruhenergie der Teilchen wird. Da die Ruhenergie der Mesonen 150 MeV beträgt, wird man nur mit einer sehr geringen Mesonenbildung rechnen dürfen. Die Ausbeute an Mesonen wird mit etwa 10^{-4} angegeben.

K. H. Höcker (Stuttgart).

Jánossy, L.: Cosmic rays. *Commun. Dublin Inst. advanced Stud.*, A Nr. 4, 56 S. (1947).

Verf. gibt einen Überblick über den derzeitigen Stand der Forschung. Nach Erklärung der Grundbegriffe wird die Yukawasche Theorie des Mesons in ihren ein-

fachsten Zügen angedeutet und den experimentellen Eigenschaften des Teilchens gegenübergestellt. Charakteristische Daten der verschiedenen Komponenten der kosmischen Strahlung sowie Untersuchungen über die Art ihrer Entstehung und die Zusammenhänge der einzelnen Komponenten folgen. Abschließend wird der mathematische Apparat der Kaskadentheorie dargestellt. *K. H. Höcker* (Stuttgart).

Bernardini, G., B. N. Cacciapuoti and R. Querzoli: Electronic component of cosmic rays in the low atmosphere. I. Theoretical. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73*, 328—334 (1948).

Verff. untersuchen die Elektronenkomponente, die sich im Gleichgewicht mit der Mesonenkomponente einstellt. Elektronenquellen sind einerseits Anstoßprozesse, andererseits Zerfall der Mesonen. Das Rechenverfahren gründet sich auf den von

Williams eingeführten „electron track“, definiert durch $z(\varepsilon, \eta) = \int_0^{\infty} N(\varepsilon, \eta, x) dx$.

(ε , η obere und untere Energie der Elektronen eines Schauers, x Abstand vom Ursprung dieses Schauers, N Anzahl der Elektronen mit Energie $\geq \eta$.) Die entwickelten Formeln halten die Verff. deshalb zur praktischen Handhabung für besonders geeignet, weil sie die Eigenschaften der auslösenden Mesonenstrahlen (Energiespektrum) explizite enthalten. Es werden numerisch berechnet: 1. die Zahl der Sekundärelektronen, die von der kosmischen Strahlung in Blei gebildet wird, für verschiedene Werte der unteren Energie η (2, 3, 4 und 5 MeV) und für verschiedene Werte der unteren Grenze des Mesonenspektrums. 2. Zahl der Sekundärelektronen, die in Luft durch Anstoßprozesse gebildet werden und die man in Meereshöhe und in 3500 m Höhe beobachtet, gleichfalls für verschiedene Energien η . 3. Zahl der Zerfallelektronen für beide Punkte der Atmosphäre. — Die experimentellen Zahlen über Elektronenintensitäten, die zum Vergleich zur Verfügung stehen, sind relativ unsicher. Immerhin kann man aussagen, daß in Höhen oberhalb 30 000 m die Elektronenintensität nicht ausschließlich als Folge der gewöhnlichen Mesonen verstanden werden kann.

K. H. Höcker (Stuttgart).

Eyges, L.: Stragglings of electrons near the critical energy. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76*, 264—270 (1949).

Die Streuung von Elektronen im Gebiet kritischer Energie — das ist jener Bereich, in dem der Energieverlust durch Ionisation gleich dem durch Bremsstrahlung ist — wird untersucht. Das Ergebnis ist brauchbar für Materiedicken, die nicht zu groß sind (< 1 Strahlungslänge). Die Arbeit verbessert damit gewisse ungenaue Bereiche in der umfassenderen Rechnung von Bhabha und Chakrabarty [*Proc. R. Soc. London A* 181, 267 (1943) und *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74*, 1352—1363 (1948)]. Das Rechenverfahren berücksichtigt zunächst nur die Strahlungsverluste der Elektronen, danach werden als zweiter Schritt auch die Ionisationsprozesse einbezogen. Die Streuwahrscheinlichkeit wird angegeben in Form einer rasch konvergierenden Reihe.

K. H. Höcker (Stuttgart).

Bau der Materie

Bohm, D. and E. P. Gross: Theory of plasma oscillations. A. Origin of medium-like behavior. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75*, 1851—1864 (1949).

Auch wenn man in manchen Einzelheiten vielleicht anderer Ansicht sein kann als die Verff., handelt es sich hier um eine interessante und weitreichende Untersuchung. Der ihr zugrunde liegende neue Gedanke [z. T. sich berührend mit Überlegungen von A. Vlasov, *J. Physics USSR* 9, 25, 130 (1945)] läßt sich kurz wohl folgendermaßen formulieren: Damit ein Ensemble von Teilchen als eine Form dessen, was man „Substanz“ nennt, angesprochen werden kann, also eine „medium-like organization“ besitzt, muß es ganz allgemein die Tendenz haben, in gewissen Grenzen unempfindlich gegen Störungen in einem statischen oder stationären Zustand zu beharren. Das Plasma ist nun das einzige System, das einfach genug ist, um im einzelnen die Bedingungen für ein derartiges Verhalten im Rahmen kinetischer Ansätze untersuchen zu können. Da man die Entwicklung einer kleinen Störung, wenn die Bewegungsgleichungen linear sind, nach Fourier analysieren kann, kann sie erfaßt werden durch eine Superposition von Wellen, in Verbindung mit der Dispersionsfunktion = Abhängigkeit der Frequenz von der Wellenlänge.

So kommt man dazu, daß Ausgangspunkt einer Plasmatheorie eine allgemeine und strenge Theorie der Plasmaschwingungen sein muß. Da ein Teilchen den von allen anderen herrührenden Kräften unterworfen ist, befindet es sich in einem rasch und unregelmäßig fluktuierenden Kraftfeld (Mikrofeld). Im Plasma sind die Wechselwirkungskräfte in erster Linie die weitreichenden Coulombkräfte, und, wenn die Teilchendichte nicht zu groß ist, kann deshalb das Kraftfeld ersetzt werden durch ein mittleres Feld; dies ermöglicht eine praktikable Vereinfachung der Sachlage. Im vorliegenden ersten Teil wird, nach dem Gesagten natürlich stets in Hinblick auf die Enthüllung der Substanzähnlichkeit (medium-like properties), zunächst eine allgemeine lineare Theorie der Plasmaschwingungen entwickelt und dann ergänzend eine Erweiterung auf nicht lineare Ansätze skizziert. Das Plasma wird dabei als unbegrenzt angenommen, und die Wirkung der „Stöße“ der Teilchen im Sinn einer praktisch momentanen Impulsübertragung wird vernachlässigt. Ferner wird bei der Durchführung der Rechnungen im einzelnen angenommen, daß die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion der Elektronen monoton absinkt mit zunehmender Geschwindigkeit. Insbesondere die zweite und dritte dieser Voraussetzungen sind natürlich recht einschneidende und könnten in zunächst schwer übersehbarem Maß die Bündigkeit mancher Folgerungen in Frage stellen.

R. Seeliger (Greifswald).

Bohm, D. and E. P. Gross: Theory of plasma oscillations. B. Excitation and damping of oscillations. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75, 1864—1876 (1949).*

Die im ersten Teil der Arbeit durchgeführten Überlegungen werden im vorliegenden zweiten Teil ergänzt und erweitert durch die Berücksichtigung der Stöße und für allgemeinere Verteilungsfunktionen. Dadurch werden die im vorhergeh. Referat erwähnten Mängel der Theorie beseitigt. Es ergibt sich nun die Möglichkeit, daß die Plasmaschwingungen gedämpft sind und vor allem, daß sich Einsichten in den Mechanismus der Anfachung der Schwingungen eröffnen. Wenn im Plasma Gruppen von Teilchen bestimmter Geschwindigkeit außerhalb der thermischen Systemgeschwindigkeiten vorhanden sind, kann das System instabil werden; dadurch können Schwingungen angeregt werden. Dem unbegrenzten Anschwellen dieser Schwingungen wirkt entgegen eine durch die Stöße bedingte Dämpfung, die nun ihrerseits stabilisierend eingreift. Wieweit sich so eine auch quantitativ befriedigende Erklärung für die Langmuirschen Experimente über die Zersplitterung von Elektronenstrahlen im Plasma geben läßt, muß wohl noch dahingestellt bleiben; im übrigen gibt es hier einen engen Zusammenhang mit den (den Verf. offenbar unbekannt gebliebenen) Untersuchungen von W. O. Schumann und seinen Mitarbeitern über die Schwingungsanfachung. Von Interesse sind noch einige nur eben skizzierte Ausblicke auf astrophysikalische Fragen und gelegentliche Bemerkungen über die Randeffekte, die vor allem in den Gasentladungsplasmen eine Rolle spielen.

R. Seeliger (Greifswald).

Moussié, Jean: Les oscillations de relaxation dans les tubes à décharge: application à l'étude de l'allumage. *Ann. Physique, XII. S. 4, 593—670 (1949).*

Die Arbeit beschäftigt sich mit dem schon vielfach studierten Mechanismus der sog. intermittierenden Entladungen, wie sie entstehen, wenn einer Entladungsröhre eine Kapazität parallelgeschaltet ist. Sie enthält in ihrem Teil I und Teil III eine eingehende experimentelle Untersuchung an Neonröhren und bringt, über bereits Bekanntes hinausgehend, insofern Neues, als nicht nur die Charakteristiken der Entladung, sondern auch intimere Eigenschaften (z. B. die Bedeckung der Kathode, Feinheiten des Zündverlaufs) untersucht und berücksichtigt werden. In Teil II versucht Verf. die bisherige Theorie der Relaxationsschwingungen demgemäß zu vervollkommen. Er leitet für die dynamische Charakteristik eine Differentialgleichung (erster Ordnung) ab, deren Lösung dann eingehend diskutiert und physikalisch ausgewertet wird. Diese Gleichung ist von der Form (die c_i enthalten die Versuchsparameter)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{c_1(y - c_2 x)(y - c_2 x - x)}{y[c_3(c_4 - y) - x]} + \frac{x}{y}.$$

Sie läßt sich durch Reihenentwicklungen behandeln, die mathematisch nicht von wesentlichem Interesse sind. Die einschlägigen, ziemlich weitläufigen Rechnungen, die im Rahmen des Elementaren bleiben, sind in zwei Anhängen mitgeteilt.

R. Seeliger (Greifswald).

Seeliger, R.: Die Diffusionstheorie der positiven Säule in elektronegativen Gasen. *Ann. Physik, VI. S. 6, 93—96 (1949).*

Durch die Mitberücksichtigung des Einflusses negativer Ionen wird die Diffusionstheorie der positiven Säule auf den Fall elektronegativer Gase erweitert. Ausgehend von den Teilchenerhaltungssätzen ergeben sich für n_+ (Elektronendichte) und n_- (Dichte der negativen Ionen) zwei simultane Differentialgleichungen. Es wird eine Lösung angegeben, die die Differentialgleichungen und die Randbedin-

gungen befriedigt und die zu der Bestimmungsgleichung für die Elektronentemperatur führt. Der Einfluß der negativen Ionen auf die Elektronentemperatur wird abgeschätzt und erweist sich als geringfügig. Die von Holm vorgenommene Berücksichtigung der negativen Ionen erweist sich als eine Näherung für geringe Konzentrationen.

Ecker (Bonn).

• **Laue, Max von: Theorie der Supraleitung. 2. Aufl.** Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag 1949. 115 S. u. 37 Textabb.

Das von Lauesche Buch erschien 1947 in erster Auflage. In die vorliegende 2. Auflage sind die inzwischen von Verf. erzielten Fortschritte in der phänomenologischen Theorie der Supraleitung eingearbeitet, so daß das Buch den Stand des Wissens im August 1949 wiedergibt. — Zunächst behandelt Verf. die Stromverzweigungen mittels eines Extremalprinzips. Es folgt die Aufstellung der Grundgleichungen. Die beiden Maxwellschen Hauptgleichungen und die Divergenzgleichungen für die Feldvektoren bleiben bestehen. Dagegen werden Strom und Ladung in einen Ohmschen Anteil und in einen supraleitenden Anteil aufgespalten, die jeweils eigenen Kontinuitätsgleichungen genügen sollen. Der Ohmsche Strom gehorcht dem Ohmschen Gesetz. Der Suprastrom besitzt einen gewissen Supraimpuls. Dieser folgt verallgemeinerten Londonschen Gleichungen. Die Verallgemeinerung gegenüber London neben der Aufspaltung in die beiden Strommechanismen besteht darin, daß die den Zusammenhang zwischen Suprastrom und Supraimpuls vermittelnde Eindringtiefe eine skalare oder tensorielle Orts- und Zeitfunktion sein kann, wenn nicht überhaupt eine nicht-lineare Beziehung zwischen Suprastrom und Supraimpuls besteht, wie sie die Heisenbergsche Elektronentheorie der Supraleitung fordert. Der Suprastrommechanismus verlangt die Existenz des Londonschen Spannungstensors, und neben dem Supraimpuls muß eine Supraenergiedichte eingeführt werden. Diese drei Größen liefern gewisse Zusatzglieder in den Erhaltungssätzen. Besonders Wert legt Verf. auf die Herausarbeitung der zentralen Stellung, welche die Londonschen Spannungen in der Theorie der Supraleitung einnehmen, während das Verschwinden des Widerstandes im stationären Fall und der magnetische Verdrängungseffekt von Meißner die beiden fundamentalen experimentellen Tatsachen sind. Verf. bringt eine Reihe von Beispielen zur Anwendung der Grundgleichungen: Ausgleich von Raumladungen, stromdurchflossene oder im Magnetfeld befindliche Supraleiter verschiedener Gestalt. Von grundsätzlicher Bedeutung sind einige Sätze über mehrfach zusammenhängende Bereiche (Dauerströme!) und über die elektrodynamischen Potentiale. Gegenüber der alten Londonschen Theorie lassen sich jetzt auch nichtstationäre Vorgänge konsequent behandeln. So begründet Verf. das normale optische Verhalten der Supraleiter. Die Thermodynamik des Übergangs normalleitend \rightleftharpoons supraleitend liefert die Gleichgewichtsbedingungen zwischen Supraleiter und Normalleiter bzw. Vakuum. Damit kann man das Verhalten sehr dünner Supraleiter gegenüber Magnetfeldern oder Strömen verstehen. Beim dünnen Supraleiter dringt das Feld mehr oder weniger stark in das Innere ein. In Verbindung mit der Potentialtheorie lassen sich Aussagen über den Zwischenzustand gewinnen, die in Übereinstimmung stehen mit neueren Messungen russischer Forscher. Verf. hat alle Untersuchungen sehr allgemein durchgeführt, wenn auch aus äußeren Gründen die nichtlineare Theorie in einem eigenen Paragraphen dargestellt wird. Besonders Wert legt Verf. auf die Durchführung des Beweises, daß die nicht-lineare Theorie nicht im Widerspruch steht mit den Ergebnissen der bisherigen linearen Theorie (Meißner-Effekt).

Schubert (München).

Frank, F. C.: On the equations of motion of crystal dislocations. Proc. physic. Soc. London, Sect. A 62, 131—134 (1949).

Verf. zeigt, worauf bereits J. Frenkel und T. Kontorova [Physikal. Z. Sowjetunion 13, 1—10 (1938); J. Physics Acad. Sci. USSR 1, 137—149 (1939); dies Zbl. 22, 283] bei der Diskussion eines eindimensionalen Modells hingewiesen haben, daß eine mit der Geschwindigkeit v bewegte gegenüber einer ruhenden Schraubenversetzung nach Burgers formal relativistisches Verhalten zeigt, wobei die transversale Schallgeschwindigkeit c_t die Grenzggeschwindigkeit ist. Die Bewegungsgleichungen sind also gegenüber der Transformation $x' = (x - vt)/(1 - v^2/c_t^2)^{1/2}$ invariant, die Versetzung erfährt eine Kontraktion der Größe $(1 - v^2/c_t^2)^{1/2}$, und ihre Energie beträgt $E = E_0/(1 - v^2/c_t^2)^{1/2}$, wo E_0 die Energie der ruhenden Versetzung bezeichnet. Bei einer Stufenversetzung nach Taylor sind die Verhältnisse qualitativ dieselben, quantitativ aber schwieriger zu behandeln, da neben c_t auch die longitudinale Schallgeschwindigkeit in den Bewegungsgleichungen auftritt. Ein Näherungsverfahren zur Integration dieser Gleichungen wird skizziert, aber nicht in Einzelheiten durchgeführt, da inzwischen J. D. Eshelby eine vollständige Lösung gefunden hat, die demnächst veröffentlicht werden wird.

A. Kochendörfer (Stuttgart).